Si consideri bene la nota sul punto decimale del regolamento d'esame

Chi si ritira, consegna **solo** questo foglio: col nome e una grande R.
Gli altri, tengono questo foglio, e consegnano la bella copia

RIQUADRARE ovvero incorniciare I RISULTATI

Legenda
$*$ è richiesto il valore esatto. Può anche essere $+\infty$, $-\infty$, o una frase.
$\approx$ è richiesta una ragionevole approssimazione.
% è richiesto il valore in percentuale, se serve ragionevolmente approssimato.
(R) è richiesto solo il risultato; negli altri esercizi riportare anche i calcoli.

Esercizio 0. Triplice – quesiti basici – chi non risolve almeno 2 non passa l'esame – per ricevere più di 18 risolvere tutti 3.

ES. 0a$_{\mu 2025}$ (R) $\approx$ Definiamo qua la (classica) *media armonica* di n numeri

$$H(x_1, ..., x_n) := \frac{n}{\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n}}$$

(che esiste *almeno* per numeri tutti positivi). Il preprint "PharmacyGPT: the Artificial Intelligence Pharmacist and an Exploration of AI for ICU Pharmacotherapy Management" (2023-2024) nel valutare l'efficienza di vari algoritmi usa un punteggio detto *precision* e un'altro *recall* e poi riasume i 2 numeri in uno solo proprio con la loro media armonica (invece che con le più note medie aritmetica o geometrica, e avrà le sue ragioni, di cui non ci occupiamo: dice "it attempts to find a balance between the two"). Dando il risultato con 2 cifre decimali, calcolare la media armonica di 0.3750 e 0.7095 (media che nel testo, com'è online il 9 gennaio 2025, risulta... sbagliata; ce n'è un'altra sbagliata, e 2 giuste; e immagini il Lettore quanti errori di calcolo ci sono, non evidenti mancando i dati originari – che qua invece ci sono – negli articolo scientifici).

$$\boxed{0.49}$$

ES. 0b$_{\mu 2025}$ (R) % Qual è la probabilità di ottenere 2 numeri primi nel lancio di 2 dadi?

$$\boxed{25\%}$$

(I numeri primi sono 3 su 6 possibili risultati nel primo dado, e cioè 2 e 3 e 5, e ugualmente per il secondo, allora la probabilità di ottenere un numero primo con un dado è 3/6 cioè 1/2, e allora con 2 dati $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0.25$).
ES. 0c$_{\mu 2025}$ (R) $*$ Qual è la parola mancante nella seguente frase?
Ancora molto usate sono le tavole cartacee dei ... normali.

$$\boxed{\text{quantili}}$$

ES. 1$_{\mu 2025}$ $*$ Si iniettano in un paziente 2 farmaci disciolti in soluzione acquosa in una singola fiala. Per il primo e il secondo si prevede nel tempo una concentrazione plasmatica

$$c_1(t) := 2 \cdot 2^{-4t}$$

$$c_2(t) := 2^{-t}$$

rispettivamente (con qualche unità di misura di cui non ci occupiamo).
In quale tempo i 2 farmaci avranno la stessa concentrazione nel plasma?

SVOLGIMENTO
Abbiamo l'equazione con gli esponenziali (in base 2) nell'incognita t

$$2 \cdot 2^{-4t} = 2^{-t}$$

$$\Big/ \log_2$$

$$\log_2 \left(2 \cdot 2^{-4t}\right) = \log_2 \left(2^{-t}\right)$$

il logaritmo del prodotto (in qualunque base) è la somma dei logaritmi (nella stessa base)

$$\log_2 2 + \log_2 2^{-4t} = \log_2 \left(2^{-t}\right)$$

e ricordando che $\log_b$ è l'inversa di $\exp_b$ (cioè il logaritmo si "semplifica" con l'esponenziale nella stessa base: $\log_b b^x \equiv x$)

$$1 - 4t = -t$$

$$1 = 4t - t$$

$$1 = 3t$$

$$\Big/ : 3$$

$$\boxed{\frac{1}{3}}$$

(Per esempio 20 minuti, cioè un terzo di ora, se il tempo è in ore).

ES. 2$_{\mu 2025}$ $\approx$ Calcolare la media interquartile del numero di abitanti di questi Stati dell'Europa Meridionale:

Albania 2.8 milioni; Andorra 77,000; Bosnia ed Erzegovina 3.3 milioni; Croazia 3.9 milioni; Grecia 10.0 milioni; Italia 59.0 milioni; Macedonia del Nord 2.1 milioni; Malta 540,000; Montenegro 620,000; Portogallo 10.4 milioni; San Marino 34,000; Serbia 6.7 milioni; Slovenia 2.1 milioni; Spagna 48.1 milioni; Turchia 84.4 milioni; Città del Vaticano 800.
(La lista è in qualche modo esaustiva, e non facciamo disquisizioni geopolitiche).

SVOLGIMENTO
Viene usato lo standard del punto decimale. (E la virgola è separatore delle migliaia).

Riordinato in modo crescente, il dataset numerico, di 16 elementi e diviso in 4 quartili (di 4 elementi), è

800; 34000; 77000; 540000 — 620000; 2100000; 2100000; 2800000 — 3300000; 3900000; 6700000; 10000000 — 10400000; 48100000; 59000000; 84400000

ed eliminando il primo e il quarto quartile restano 8 numeri la cui media

$$\frac{620000 + 2100000 + 2100000 + 2800000 + 3300000 + 3900000 + 6700000 + 10000000}{8} =$$

$$= \frac{31520000}{8} =$$

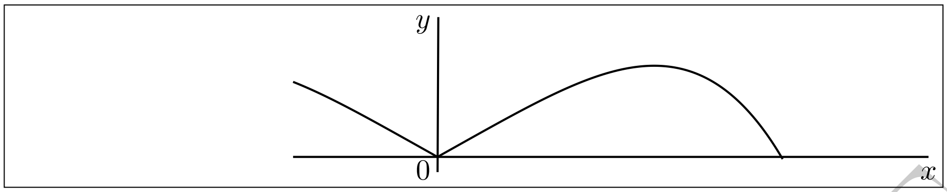
è la media interquartile cercata:

$$\boxed{3{,}940{,}000}$$

ES. 3$_{\mu 2025}$ $*$ Trovare il punto di massimo per $x > 0$ della funzione

$$f(x) := \frac{|x|}{2} - x^4$$

(In $[0, 0.793]$ potrebbe modellizzare un'epidemia ma non ce ne occupiamo).



SVOLGIMENTO

Per gli x positivi, come sono quelli che dobbiamo considerare in base al quesito, è $|x| = x$, e in pratica il segno di valore assoluto là "scompare" e la funzione da considerare è semplicemente

$$f(x) \coloneqq \frac{1}{2}\,x - x^4 \qquad x > 0$$

e la disequazione $f' > 0$ è, ricordando la classicissima $D\,x^n = n\,x^{n-1}$,

$$f'(x) = \frac{1}{2} - 4\,x^3 > 0 \qquad x > 0$$

$$-4\,x^3 > -\frac{1}{2}$$

$$/ \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) < 0$$

$$x^3 < \frac{1}{8}$$

$$/ \sqrt[3]{}$$

$$x < \frac{1}{2}$$

allora là (da 0 a 1/2) la funzione cresce e dopo (cioè da 1/2 a $+\infty$) decresce, e allora il punto di massimo è proprio

$$\boxed{\tfrac{1}{2}}$$

ovvero anche, per esempio con lo standard del punto decimale,

$$\boxed{0.5}$$

ES. 4$_{\mu 2025}$ % Per un test diagnostico in una determinata popolazione si abbia

	MALATI	SANI
POSITIVI	623	59
NEGATIVI	51	924

Calcolare la specificità del test.

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale, a scelta).

Ricordando la definizione della specificità

$$Sp := \frac{veri\,negativi}{totale\,sani} = \frac{V_-}{V_- + F_+} =$$

coi dati del quesito

$$= \frac{924}{924 + 59} =$$

$$= \frac{924}{983} \approx$$

con la calcolatrice

$$\approx 0.939\,979\,654$$

e in percentuale come richiesto e con ragionevole approssimazione

$$\boxed{\approx 94\%}$$

ES. 5$_{\mu 2025}$ $\ast$ Calcolare lo stimatore dei momenti $\hat{a}$ per una variabile aleatoria discreta di parametri 0 e a del quale si abbia un campione che (per caso, e in effetti alquanto soreprendente) ha i valori dei primi 8 valori della successione di Fibonacci 1, 1, 2... Si dia la scrittura decimale del risultato.

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard del punto decimale, a scelta).

Nella successione di Fibonacci ogni numero dal terzo in poi è somma dei 2 precedenti, e se viene iniziata – come nel quesito è detto – da 1 e 1 (e non piuttosto da 0 e 1 come altri Autori fanno) è

$$1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21...$$

Lo stimatore di a è notoriamente il doppio della media del campione:

$$\hat{a} \coloneqq 2 \cdot \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \qquad = 2\,\bar{X}_n$$

e adesso con $n = 8$ e con gli 8 valori sopra scritti

$$2\,\frac{1+1+2+3+5+8+13+21}{8} =$$

$$= 2 \cdot \frac{54}{8} =$$

e con la calcolatrice (senza nemmeno fare semplificazioni, abbastanza inutili in questo caso visto che si vuole la scrittura decimale del risultato)

$$\boxed{13{,}5}$$