Le Compresse di Matematica per le Scienze della Farmacia

Lezioni 6-7

versione 8 ottobre 2026

BOZZA - DRAFT

Università degli Studi di Trieste

Alessandro Soranzo
Ricercatore universitario
Settore Scientifico Disciplinare:
MATH-03/A - Analisi matematica
Gruppo Scientifico Disciplinare:
01/MATH-03 - Analisi matematica, probabilità e statistica matematica

Indice

6 Ripasso di Algebra – I parte **4**
6.1 Introduzione [14] . . . 5
6.2 Operazioni binarie (interne) dell'algebra dei numeri [17] . . . 5
6.3 Somma [19] . . . 6
6.4 Sottrazione [21] . . . 6
6.5 Moltiplicazione [23] . . . 7
6.6 Divisione [26] . . . 7
6.7 Elevamento a potenza [29] . . . 9
6.8 Salto dell'uguale di tipo additivo [33] . . . 10
6.9 Salto dell'uguale di tipo moltiplicativo [36] . . . 11
6.10 Horribilia: frazioni miste [38] . . . 12
6.11 Horribilia: scrittura del marketing [40] . . . 12
6.12 La divisione è variamente definita [42] . . . 12
6.13 Divisione euclidea in Z [43] . . . 13
6.14 Proprietà delle 4 operazioni [47] . . . 14
6.15 Precedenze algebriche e parentesi [52] . . . 16
6.16 Diverse opinioni, 1 o 16, su quanto fa 8/2(2+2) [54] . . . 17
6.17 Excel sbaglia ovvero calcola a modo suo [58] . . . 18
6.18 Le potenze [00] . . . 19
6.19 Proporzioni [07] . . . 22
6.20 ESERCIZI SULLA LEZIONE 6 . . . 26
6.20.1 Esercizio risolto a – Dosaggio in mg/kg/die . . . 26
6.20.2 Esercizio risolto b – Equazione lineare . . . 27
6.20.3 Esercizio tanto carino quanto capriccioso . . . 28

7 Ripasso di Algebra – II parte **29**
7.1 Le radici [13] . . . 29
7.2 Proprietà dei radicali ovvero radici [20] . . . 31
7.3 Statistica descrittiva: la media geometrica [24] . . . 32
7.4 Un confronto fra media aritmetica e geometrica [28] . . . 33
7.5 Altre ricorrenze della radice quadrata in Farmacia [30] . . . 34
7.6 La radice cubica in Medicina e Farmacia [34] . . . 35
7.7 Esempi di calcolo con le radici. [37] . . . 37
7.8 Ordinamento dei numeri [39] . . . 37
7.9 Altre formule classiche dell'algebra [42] . . . 38
7.10 Radici quadrate e cubiche, ed elettrocardiogrammi [44] . . . 38
7.11 La Medicina non è una Scienza Esatta [47] . . . 39
7.12 Il volùbil aspartame [48] . . . 40
7.13 Complementi – Ulteriori formule classiche . . . 41
7.14 ESERCIZI SULLA LEZIONE 7 . . . 42

BOZZA - DRAFT

7.14.1 Esercizio risolto a – Area corporea 42
7.14.2 Esercizio risolto b – Mortalità fra ricoverati 43

BOZZA - DRAFT

6 Ripasso di Algebra – I parte

Nelle Lezioni 6 e 7 c'è un ampio ripasso dell'Algebra vista fino alla terza media.

In particolare in Farmacia si usano molto *le quattro operazioni*:

- somma
- sottrazione
- moltiplicazione
- divisione



La sospensione orale in figura è etichettata 250 mg/5 ml: significa che ogni 5 ml di liquido contengono 250 mg di principio attivo. (Allora, per esempio, 1 ml ne contiene 50 mg).

In misura minore si usano

- divisione euclidea
- radice quadrata
- potenza

e altre operazioni.

BOZZA - DRAFT

Con questi strumenti risolveremo il seguente problema, che comunque potrebbe essere dato e risolto in terza media, con *le quattro operazioni* e le *proporzioni*.

ESEMPIO MOLTO CONCRETO – VEDI IMMAGINE SOPRA

A un bambino di 18 kg il pediatra prescrive un antibiotico al dosaggio di

$$50 \text{ mg/kg/die}$$

da suddividere in 2 somministrazioni giornaliere (una ogni 12 ore). In farmacia è disponibile la sospensione orale etichettata "250 mg/5 ml", in flacone da 100 ml. (Dove die significa *al giorno*, mentre una *sospensione orale* è un medicinale liquido da agitare e assumere per bocca).

1. Quanti milligrammi di farmaco deve assumere il bambino ogni giorno?
2. Quanti milligrammi per ogni somministrazione?
3. Quanti millilitri di sospensione per ogni somministrazione?
4. Per quanti giorni *completi* di terapia basta un flacone?
5. La terapia prescritta dura 7 giorni: quanti flaconi servono?

6.1 Introduzione [14]

Nel suo sviluppo storico e nel suo progressivo approfondimento, possiamo dire, in termini molto generali, che ogni Scienza Applicata attraversa successivamente le seguenti fasi:

qualitativa	"fai bollire *un po'* di semi per *un po'*"
quantitativa	"fai bollire 12 semi in 1 tazza d'acqua"
operazioni numeriche	"50 kg × 3 mg/kg/die = 150 mg/die"
funzioni numeriche	"$\mathrm{height(cm)} = \mathrm{age(yr)} \times 6.5 + 76$" (*)
analisi statistica dei dati	(che vedremo molto più avanti)

(*) La formula sull'altezza si riferisce a bambini cinesi di 2-10 anni in https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/19573410/.

Vogliamo qua occuparci delle operazioni sui numeri, per esempio a/b, che potrebbe[1] dare la *densità* se a è una massa e b un volume.

BOZZA - DRAFT

6.2 Operazioni binarie (interne) dell'algebra dei numeri [17]

In questa Lezione ci occuperemo solo[2] di *operazioni binarie*: esse da 2 *operandi* producono 1 *risultato*.

Nei seguenti 5 paragrafi considereremo 5 operazioni, che hanno un'infinità di ricorrenze nelle Scienze Applicate e in particolare in Farmacia:

somma
sottrazione
moltiplicazione
divisione
elevamento a potenza

e le prime 4 sono classicamente dette *le quattro operazioni (aritmetiche fondamentali)*.

[1] E che diventa una funzione $f_1(a)$ o $f_2(b)$ se a o rispettivamente b è considerato variabile. (E addirittura una funzione $f_3(a, b)$ di 2 variabili se sono considerati variabili sia a che b, caso di cui ora non ci occuperemo).

[2] Osserviamo che certi software considerano il passaggio all'opposto, cioè la funzione $f(x) := -x$, un'operazione unaria, che agisce su 1 numero producendo 1 numero.

6.3 Somma [19]

$a + b$, somma ovvero addizione.

Per esempio 5 giorni di terapia più 3 giorni di terapia: 8 giorni di terapia. Oppure 100 mg di vitamina C più 80 mg di vitamina C.

Viene scritta col + e anche col simbolo di sommatoria $\sum$: dati dei numeri a_3, a_4, a_5, la somma

$$a_3 + a_4 + a_5 \quad \text{la scriveremo anche} \quad \sum_{k=3}^{5} a_k$$

e i numeri 3 e 5 possono essere sostituiti da qualsiasi altri, e così pure l'*indice di sommatoria* k e il nome a_k della *variabile indiciata*: una forma comoda per rappresentare somme di molte variabili indiciate: $\sum_{i=n}^{m} x_i$. Per esempio

$$\texttt{ricavoAnnuo=} \sum_{n=1}^{365} \texttt{ricavoGiornaliero(n)}$$

Osserviamo che Excel ha una sua sintassi[3] per la sommatoria.

BOZZA - DRAFT

6.4 Sottrazione [21]

$a - b$, sottrazione ovvero differenza

Per esempio €150–€80.

La sottrazione funziona come sommare l'opposto, in Matematica, ma nelle Scienze Applicate è meglio considerare la sottrazione come un'operazione a sé stante.

Si faccia attenzione che in $a - b - c$ si deve calcolare prima $a - b$.

[3] In Excel in italiano si scriva `=SOMMA(B2:B366)` dove nella colonna B, dalla riga 2 alla 366, sono i valori di `ricavoGiornaliero(n)` per i 365 giorni. In Excel in inglese `SUM`.

6.5 Moltiplicazione [23]

$a \times b$, moltiplicazione ovvero prodotto.

Per esempio volume totale infuso = tempo × velocità di infusione.

La moltiplicazione si scrive in vari modi e bisogna fare attenzione:

- $a \times b$ che espone alla confusione con la variabile x
- $a\,b$ che espone alla confusione[4] con un'ipotetica variabile ab
- $a * b$ usato solo su calcolatrici e in linguaggi informatici
- $a \cdot b$ che coi numeri espone alla confusione col punto a mezza altezza con funzione di punto ovvero virgola decimale, per esempio molti con $3 \cdot 14$ intenderebbero l'approssimazione classica di pi greco.

BOZZA - DRAFT

6.6 Divisione [26]

$\frac{a}{b}$ divisione ovvero quoziente.

Per esempio concentrazione = $\frac{\text{quantità di farmaco}}{\text{volume della soluzione}}$

La divisione si scrive in vari modi e bisogna fare attenzione:

- $\frac{a}{b}$
- a/b
- $a : b$
- $a \div b$ soprattutto su calcolatrici reali o virtuali
- $a\,b^{-1}$ che tenderemo ad evitare, per esempio il classico $\mathrm{m\,s^{-1}}$
- La parola *per*, come in "24 mg per ml" o "23 mg di sodio per 20 ml": il "per" significa /. Nei nomi e nelle etichette dei farmaci italiani, allo scrivente appare che prevale nettamente la barra ("120

[4] C'è anche un'altra possibile ambiguità: $y\,(x+1)$ denota sia una funzione y calcolata in $x+1$ che $y \cdot (x+1)$: nel caso del prodotto è meglio scrivere $(x+1)\,y$ oppure $y \cdot (x+1)$.

mg/5 ml", "100 mg/ml"), ma nel testo dei fogli illustrativi e dei Riassunti delle Caratteristiche del Prodotto il "per" si incontra, sia con 1 ml che con volumi diversi.
(VERIFICATO: nella scheda tecnica italiana della Tachipirina sciroppo e gocce compaiono sia "24 mg di paracetamolo per ml di prodotto" sia "27,6 mg di sodio per 20 ml").
Questo fatto è da attenzionare massimamente nei calcoli perché in italiano la parola "per" normalmente corrisponde alla moltiplicazione, non alla divisione, ma in Farmacia spesso corrisponde proprio alla divisione.

BOZZA - DRAFT

6.7 Elevamento a potenza [29]

a^b, elevamento a potenza: a (elevato) alla b

Per esempio:

$$\text{volume di una compressa sferica} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \text{raggio}^3$$

Un esempio più complesso: in una formula moderna per la stima della funzione renale compare il termine $0.9938^{\text{età}}$

L'elevamento a potenza si scrive in vari modi e bisogna fare attenzione:

- a^b che è la scrittura[5] migliore
- `a^b` su certe calcolatrici reali o virtuali
- `a**b` in vari linguaggi informatici (e anche `pow(a,b)`).

☹ **Ambiguità.** In ambito medico e farmaceutico, talvolta per indicare la potenza

non essendo disponibile la scrittura a^b
non essendo disponibile il simbolo ^
non conoscendo il simbolo informatico ** per l'elevamento a potenza

si tralascia tutto (!) e si lascia all'intuito del lettore l'intelligenza delle formule.

Per esempio la formula[6] (di Mosteller) usata per il dosaggio dei chemiotera- pici a partire da peso W e altezza H del paziente

$$\frac{1}{6}(W \cdot H)^{0.5}$$

si trova trascritta sul sito governativo statunitense PubMed, che riporta l'abstract di un articolo scientifico, in questo[7] modo:

1/6(WH)0.5 LINK->

Altro pessimo esempio, con 2 esponenti, a questo LINK->

[5] Ma a^2, per esempio, può indicare $a \cdot a$ e anche – raramente – una variabile di nome a^2.
[6] Equivalentemente: $\frac{1}{6}\sqrt{W \cdot H}$
[7] E si noti anche l'$(1/6)$ riportato senza parentesi, con seria ambiguità.

BOZZA DRAFT

6.8 Salto dell'uguale di tipo additivo [33]

Icasticamente e come se fossimo a un teatro di burattini:

Qualunque quantità può fare il "salto dell'uguale" cambiando segno
e

da sommata a destra diventa sottratta a sinistra,
da sommata a sinistra diventa sottratta a destra,
da sottratta a destra diventa sommata a sinistra,
da sottratta a sinistra diventa sommata a destra.

Molto chiaramente indicheremo tutto ciò con la scrittura

$$\Big/ + [\text{espressione}]$$

Esempio: sommiamo ad ambo i membri $-5\,x$ per avere 0 a destra:

$$x^2 + 6 = 5\,x \quad \Big/ + (-5\,x) \text{ o più sveltamente } -5\,x$$

$$x^2 - 5\,x + 6 = 0$$



Più tecnicamente:
l'equazione, cioè uguaglianza comprendente un'incognita,

$$f(x) = g(x) \qquad \text{per esempio } x^2 + 6 = 5\,x$$

è equivalente (cioè ha le stesse soluzioni) a

$$f(x) + s(x) = g(x) + s(x) \qquad \text{per esempio } x^2 - 5\,x + 6 = 0$$

OZZA - DRAFT

6.9 Salto dell'uguale di tipo moltiplicativo [36]

Similmente al paragrafo precedente avviene con un moltiplicando, che facendo il "salto dell'uguale" diventa divisore, e viceversa, per esempio nella

$$7\,x = 14$$

il fattore 7 a sinistra diventa divisore a destra

$$x = \frac{14}{7}$$

$$x = 2$$

ovvero con più completa scrittura

$$7\,x = 14 \quad \Big/ : 7$$

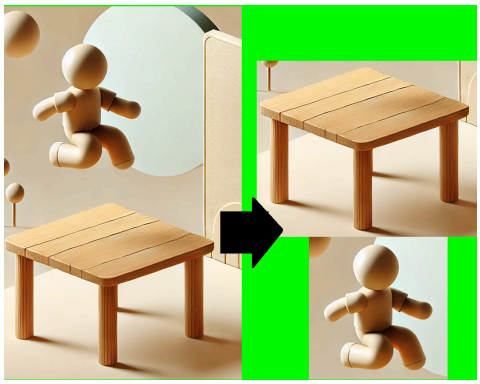
eccetera come sopra.
E nella

$$1 = \frac{3}{x}$$

il divisore x diventa moltiplicando (dell'1) trovandosi

$$x = 3$$

(cioè abbiamo fatto $\Big/ \cdot x$ richiedendo ovviamente $x \neq 0$).



BOZZA - DRAFT

6.10 Horribilia: frazioni miste [38]

☹ Si faccia attenzione all'ambiguità della "frazione mista" o "numero misto" che si usa per esempio per i voti scolastici, come

$$7\frac{1}{2}$$

Il valore è $7+\frac{1}{2}$ e cioè 7.5, non $7\cdot\frac{1}{2}$ cioè 3.5. Cerchiamo di evitare come la peste tali frazioni miste. Ma potremo trovarle su questionari dove i pazienti valutano $7\frac{1}{2}$ il loro stato di salute (o la soddisfazione del servizio della farmacia), e allora nella raccolta dati trascriveremo sul computer `7.5` e non certo `7(1/2)` che manderebbe in errore molti software e da WolframAlpha verrebbe interpretato come `7*(1/2)` invece che `7+(1/2)`.

BOZZA - DRAFT

6.11 Horribilia: scrittura del marketing [40]

☹ Si faccia attenzione alla scrittura *del marketing* 3×2 che non ha nulla a che vedere con la moltiplicazione e rappresenta uno *sconto*, precisamente $m\times n$ significa che di m prodotti non ne pagheremo $m-n$ e allora lo sconto percentuale è

$$sconto = 100\cdot\frac{m-n}{m}\,\%$$

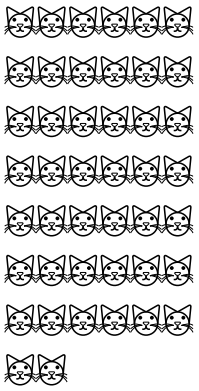
Esempio$_\mu$ Una farmacia vende confezioni di filo interdentale in offerta 4×3: calcoliamo lo sconto.
1 su 4 confezioni non viene pagata e allora lo sconto è $\frac{1}{4}$ cioè 25%.

6.12 La divisione è variamente definita [42]

La divisione presenta qualche problematica:
44 diviso 6
- fa $7.\overline{3}\approx 7.333$ in $\mathbb{R}$,
- fa $\frac{44}{6}$ ovvero meglio $\frac{22}{3}$ in $\mathbb{Q}$,
- fa *7 col resto di 2* in $\mathbb{Z}$, come ora approfondiremo.

6.13 Divisione euclidea in $\mathbb{Z}$ [43]

Come ci ricorda la canzoncina *Quarantaquattro gatti*,



che si disponevano *in fila per 6*, ma *col resto di 2*, è $44 = 6 \cdot 7 + 2$.[8]
Diremo a il *dividendo* e b il *divisore*. Scriviamo per massima chiarezza:
$dividendo = divisore \times quoziente + resto \quad 0 \le resto < |divisore|$.[9]

BOZZA - DRAFT

ESERCIZIO$_\mu$ Una scatola di pillole ha 4 blister di 6×4 pillole. Una persona ne consuma 7 al giorno, finché a un certo punto ne restano meno di 7: quante precisamente?
Le pillole sono in tutto $4 \cdot 6 \cdot 4 = 96$. Con la calcolatrice (o a mano) troviamo

$$96/7 = 13.7...$$

e allora la persona ha consumato 7 pillole al giorno per 13 giorni, in tutto $13 \cdot 7 = 91$. Allora restano alla fine $96 - 91$ cioè 5 pillole.
Con WolframAlpha `Remainder[4*6*4,7]`

[8] Più in generale, come leggiamo in Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Divisione euclidea*

> Dati due numeri interi a e b con $b \neq 0$ esiste un'unica coppia di interi q ed r detti *quoziente* e *resto* tali che
> $a = b \times q + r$
> $0 \le r < |b|$

[9] Si noti che il resto è minore del divisore in valore assoluto, ma non necessariamente del quoziente in valore assoluto, per esempio $11 = 4 \cdot 2 + 3$ (ed effettivamente il resto 3 è minore del divisore 4, ma non del quoziente 2), e stiamo dividendo 11 per 4, mentre se dividiamo 11 per 2 abbiamo $11 = 2 \cdot 5 + 1$ (ed effettivamente il resto 1 è minore del divisore 2).
(Si noti ancora che tutto ciò vale anche con numeri negativi, per esempio -21 diviso 9 dà quoziente -3 e resto 6, cioè $-21 = 9 \cdot (-3) + 6$, come troviamo subito online con WolframAlpha con `Quotient[-21,9]` e `Remainder[-21,9]`).

6.14 Proprietà delle 4 operazioni [47]

Con *le 4 operazioni* si intendono + − × /.

Il + e il · sono[(10)] commutativi e associativi:

$$x + y = y + x \qquad x\,y = y\,x$$

$(x + y) + z = x + (y + z)$ che scriveremo di solito $x + y + z$

$(x\,y)\,z = x\,(y\,z)$ che scriveremo di solito $x\,y\,z$

(Le parentesi indicano precedenze nel calcolo, v. 6.15).

Il − non è commutativo: per esempio 6-2 fa 4 ma 2-6 fa -4.
E non è neanche associativo; ovvio ma meglio dirlo:

$11 - 6 - 2$ si calcola nell'ordine $5 - 2$ e infine 3 (il 5 è $11 - 6$)

assolutamente non $11 - 4 = 7$ (computando prima $6 - 2$)

cioè

$11 - 6 - 2$ significa $(11 - 6) - 2$.

(Come detto, le parentesi indicano precedenze nel calcolo, v. 6.15).

Il / ha esattamente le stesse problematiche dette per il −, non è commutativo, per esempio $6/3$ fa 2 ma 3/6 fa 0.5 ovvero $\frac{1}{2}$, e non è neanche associativo:

$$(x/y)/z \neq x/(y/z).$$

La scrittura $x/y/z$ senza parentesi sarebbe meglio evitarla in Matematica ma è usata in Farmacia.
È da intendersi che quelle 2 operazioni si fanno nell'ordine scritto.
Per esempio l'*indice di massa corporea* si calcola con

$$IMC := BMI := peso(kg)/statura(m)/statura(m)$$

[10] in tutti gli insiemi numerici considerati in questo testo elementare, precisazione che in generale ometteremo.

BOZZA - DRAFT

E si consideri anche il classico della Farmacia

$$\text{mg/kg/die}\,^{(11)}$$

Valgono 4 proprietà distributive:

$$(x+y)\,z = x\,z + y\,z$$

$$(x-y)\,z = x\,z - y\,z$$

$$\forall z \neq 0 \qquad (x+y)/z = x/z + y/z \quad ossia \quad \frac{x+y}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$$

$$\forall z \neq 0 \qquad (x-y)/z = x/z - y/z \quad ossia \quad \frac{x-y}{z} = \frac{x}{z} - \frac{y}{z}$$

ma in generale $\frac{x}{y+z}$ è diverso da $\frac{x}{y} + \frac{x}{z}$, e similmente coi $-$.
Poi

$$-(-x) = x \qquad e \;\; \forall\, x \neq 0 \;\; \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \quad (involuzioni)$$

e più completamente le 2 "formule delle frazioni a 3 piani"

$$\frac{x}{\frac{z}{w}} = x \cdot \frac{w}{z} \qquad \forall\, z, w \neq 0\,.$$

$$\frac{\frac{x}{y}}{z} = \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{z} \qquad \forall\, y, z \neq 0\,.$$

e più completamente ancora la "formula della frazione a 4 piani"

$$\frac{\frac{x}{y}}{\frac{z}{w}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{w}{z} \qquad \forall\, y, z, w \neq 0\,.$$

BOZZA - DRAFT

[11] È da utilizzarsi in questo modo:

Y mg/kg/die

si calcola

$Y \times$ (peso [del paziente, o della cavia...] in chilogrammi)

e il risultato è in
mg/die,
cioè milligrammi da assumere ogni giorno. (Da un punto di vista matematico, intendono cioè (mg/kg)/die, implicitamente, come per il – si fanno le operazioni nell'ordine in cui sono scritte, il che è massimamente ragionevole).

E ancora

$$x + (-x) = x - x = 0 \qquad e \; \forall \; x \neq 0 \;\; x \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

$$x + 0 = 0 + x = x \quad (0 \, elemento \, neutro \, rispetto \, al +)$$

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \quad (1 \, elemento \, neutro \, rispetto \, al \cdot)$$

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0 \quad (0 \, elemento \, assorbente \, rispetto \, al \cdot)$$

$\frac{0}{x} = 0 \;\; \forall \; x \neq 0 \qquad ma \, \frac{x}{0}$ **non esiste mai, neppure** $\frac{0}{0}$.😎

⇑ **Si eviti come la peste "l'orribile fratto zero"** ⇑

Si dimostra subito

$$\frac{a\,b}{a\,c + a\,d} = \frac{b}{c + d}$$ cioè qua a si semplifica

ma (errore comunissimo) 😎

da $\frac{a\,b}{a\,c + d}$ questa "semplificazione" $\frac{b}{c + d}$ è sbagliata.

Esempio economico.

Scontare di una certa percentuale il costo totale di 2 articoli,
oppure

totalizzare i 2 costi scontati

dà *in teoria* lo stesso risultato, per esempio – per fissare le idee – con uno sconto del 20%

scontare la somma $(x + y) \cdot 0.8 = x \cdot 0.8 + y \cdot 0.8$ sommare gli scontati

Questo è vero se si fanno i calcoli con infiniti decimali. Facendoli con 2 decimali com'è usuale nel commercio in euro o dollari, possono verificarsi discrepanze, in genere piccole. 😎

6.15 Precedenze algebriche e parentesi [52]

Precedenze implicite delle operazioni, da seguire in mancanza di parentesi che le modifichino, dalla precedenza più debole:

BOZZA - DRAFT

\+ e − ← precedenza più debole
/ e · anche se non trascritto: in $x + 3\,y$, prima calcolare $3\,y$.
^ anche se non trascritto: in $2\,x^3$, prima calcolare x^3.

Le parentesi possono modificare le precedenze:
$(x+3)\cdot y$ ci fa prima sommare x e 3. Invece senza parentesi in $x+3\cdot y$ prima si moltiplicano 3 e y, poi si fa la somma.

Sempre meglio scrivere parentesi che lasciare incertezze.

Si possono usare quante si vogliano coppie di parentesi "annidate" una dentro l'altra

$$(...(...(...)...)...)$$

ma spesso per chiarezza si usano anche parentesi quadre e graffe:

$$\{...[...(...)...]...\}$$

BOZZA - DRAFT

6.16 Diverse opinioni, 1 o 16, su quanto fa $8/2(2+2)$ [54]

Leggiamo su sito della prestigiosa Università di Harvard

> The question 8/2(2+2) has different answers depending on the rule which is used. One can interpret it as (8/(2(2+2))) = 1 or (8/2)(2+2) = 16 depending on the rule. There is no universally accepted rule as there are several: PEMDAS, BEDMAS, PE(MD)AS. It is not possible to say what is correct and what is incorrect. There are different rules, leading to different results. The expression is not well defined. It appears that most humans naturally give the answer 1 and most computers and programming languages return the answer 16. In order to make the expression unambiguous, one has to put brackets.

Una buona idea: seguire lo standard ISO.
Lo standard ISO esclude le scritture $a/b/c$ e $a/b\cdot c$ senza parentesi.

Senza aspettarsi che l'umanità ci segua, anzi con la certezza che negli articoli scientifici di Farmacia purtroppo scrivono così, non si scrivano espressioni come

$a/b/c$ (si scelga $(a/b)/c$ oppure $a/(b/c)$ a seconda dei casi)
e $a/b\cdot c$ (si scelga $(a/b)\cdot c$ oppure $a/(b\cdot c)$ a seconda dei casi).
(Standard ISO 80000 - 1:2009(E), riportato in LINK->).
Nondimeno nessun matematico sano di mente dubiterà che

$$9\,a^2 : 3\,a$$

faccia $3\,a$. Intendendo (ma chi lo scrive?) $(9\,a^2) : (3\,a)$. Tristezza.
Si veda *I. Relating to the Order of Operations in Algebra*. By N.J. Lennes. The American Mathematical Monthly: (1917) Vol. 24, No. 2, pp. 93-95.

La situazione è grave ma non è seria... ...detto col classico aforisma di Flaiano. Attualmente, terza decade del XXI secolo, della situazione con la scrittura delle 4 operazioni si può dire proprio così.

Si trova una calcolatrice

(fotografata per esempio in https://blogdimatematicaescienze.it/il-paradosso-del-pemdas-lavete-risolto/)
che per

$$6 : 2 \times (1+2) \quad \text{e} \quad 6 : 2\,(1+2)$$

dà risultati 9 e 1 rispettivamente.
E ci si preoccupi, se si pensa che la calcolatrice "non sbaglia mai".

BOZZA - DRAFT

Quella calcolatrice dà diverso livello di precedenza alla moltiplicazione se scritta $\times$ oppure indicata implicitamente.

Riprendendo qua a un livello matematico l'imperativo classico *conosci te stesso* diciamo:

CONOSCI LA TUA
CALCOLATRICE

Bottom line
Per ogni coppia di parentesi che mettete, un'ambiguità muore.

6.17 Excel sbaglia ovvero calcola a modo suo [58]

Rimarchiamo lo sconcertante fatto che il software Excel, di ampio uso nelle Scienze Applicate, contro le convenzioni

di tutta la comunità matematica, per `-3^2` **dà** `9` **invece che** `-9`**, come se fosse da intendere** $(-3)^2$**.**
Quindi attenzione se si copia in Excel una formula da un altro software, dove normalmente il risultato sarebbe -9, avendo l'elevazione a potenza la precedenza sul meno.
È un caso strano, questo di Excel; addirittura in rete si trova un simulatore di Excel, che dà il risultato opposto di Excel... 😉
E attenzione ancora a questo:

per calcolare -3^2 $_{che\ fa\ -9}$ in Excel si deve scrivere `-(3^2)`

6.18 Le potenze ^{00}

Riprendendo per un momento la questione delle ambiguità notazionali, si eviti come la peste la scrittura $a\hat{}b\hat{}c$, specificando con una coppia di parentesi quale potenza si deve calcolare per prima, e se non lo si fa non ci si aspetti unanimità di risultati fra i vari software (e umani).

BOZZA - DRAFT

In questa trattazione elementare delle potenze supponiamo nota una conoscenza di base delle radici. Sarebbe possibile fare prima una trattazione elementare delle radici, presupponendo note le potenze. Evitare del tutto queste problematiche è possibile ma al prezzo di complicazioni che qua vogliamo evitare.

1. Esponente intero positivo. Scriviamo
x^2 per $x \cdot x$
x^3 per $x \cdot x \cdot x$
x^4 per $x \cdot x \cdot x \cdot x$
e più in generale definiamo $a \in \mathbb{R}$ *elevato alla* $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, il numero

$$a^n = a \cdot \ldots \cdot a \quad (n\,volte)$$

2. Esponente razionale positivo. Si definisce $a \geq 0$ *elevato alla* $q = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$, $m, n > 0$, il numero

$$a^{\frac{n}{m}} := \sqrt[m]{a^n}$$

Per esempio $x^{1.5} = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$.

3. Esponente reale positivo. Per la potenza con esponente $q \in \mathbb{R}$ si richiede $a \geq 0$, e se q è razionale vale quanto sopra, e se è irrazionale si dà una definizione complessa che si può quasi immaginare sostituendo q con una sua *"straordinariamente buona"* approssimazione razionale: $a^{\sqrt{2}}$ sarà *"circa"* $a^{1.41}$ a sua volta uguale a $\sqrt[100]{a^{141}}$. Ancor meglio $\sqrt[1000]{a^{1414}}$.

4. Esponente negativo. Ponendo per $a \neq 0$

$$a^{-t} := \frac{1}{a^t}$$

la potenza è definita per tutti gli esponenti non nulli; e per l'esponente 0 si pone se $a \neq 0$ (rimanendo non definito 0^0)

$$a^0 := 1 \, .$$

BOZZA - DRAFT

Grafici delle funzioni potenza per base positiva. Ecco su WolframAlpha i grafici di alcune funzioni potenza: Link->

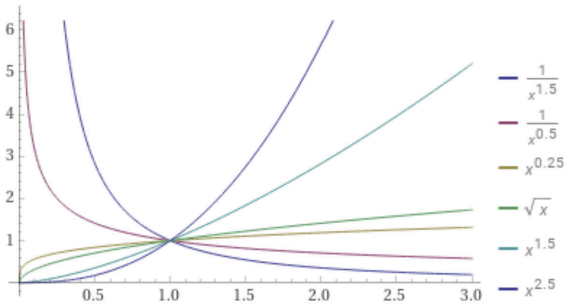


Figura 1: Esponenti −1.5, −0.5, 0.25, 0.5, 1.5, 2.5. Screenshot da WolframAlpha

Proprietà delle potenze. L'elevamento a potenza non è nè commutativo, per esempio $2^3 = 8 \neq 9 = 3^2$, nè associativo. Valgono invece queste 12 proprietà, di cui la 0-esima già detta:

(0) $x^{-y} := \frac{1}{x^y}$

(1) $x^{y+z} = x^y \cdot x^z$

(1 bis) $x^{y-z} = \frac{x^y}{x^z}$

(2) $x^{y \cdot z} = (x^y)^z$

(2 bis) $x^{\frac{y}{z}} = \sqrt[z]{x^y}$ se $z = 2, 3, 4...$

(3) $(x \cdot y)\hat{}z = (x\hat{}z) \cdot (y\hat{}z)$ $ossia\,(x\,y)^z = x^z y^z$ $(distributiva)$

(4) $(x/y)\hat{}z = (x\hat{}z)/(y\hat{}z)$ $ossia\left(\frac{x}{y}\right)^z = \frac{x^z}{y^z}$ $(distributiva)$

(4 bis) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-z} = \left(\frac{y}{x}\right)^z$

(5) $1^x = 1$

(6) $x^1 = x$

(7) $x^0 = 1 \quad \forall\, x \neq 0$

(8) $0^x = 0 \quad \forall\, x > 0$

e attenzione poi che

0^0 **non esiste.**

Si noti la notazione, ovvero convenzione sulla notazione:

$$_{usualmente\,scritto\,\rightarrow}\; x^{y^z} := x^{(y^z)} \;_{\leftarrow raramente\,scritto}$$

per esempio 2^{2^3} è 2^8 cioè 256, non è 4^3 cioè 64, che è $(2^2)^3$.

Esempio sulla proprietà (2).
Volume di un cubo di lato $10^{-10}\,m$. Essendo $volume_{cubo} = lato^3$, si ha $(10^{-10})^3$ cioè $10^{-30}\,m^3$.

BOZZA - DRAFT

Esempio sulle proprietà (2), (4), (5).
Modellizziamo la diluizione omeopatica in acqua con
1 CH : $\frac{1}{100}$ cioè 1 parte di sostanza su 100 totali, e 99 sono acqua
2 CH : $\frac{1}{100}\frac{1}{100}$
e così via, sempreché si riuscissero ad evitare contaminazioni:

$$\text{n CH} : \left(\frac{1}{100}\right)^n$$

(Abbiamo modellizzato solo la questione della diluizione, non l'inevitabile effetto placebo nè l'ipotetica "memoria dell'acqua" affermata dagli omeopati).
A cosa corrisponde 10 CH?

Con le proprietà delle potenze

$$\text{10 CH} : \left(\frac{1}{100}\right)^{10} =$$

$$= \frac{1^{10}}{100^{10}} = \frac{1}{100^{10}} =$$

$$= \frac{1}{(10^2)^{10}} =$$

$$= \frac{1}{10^{20}}$$

cioè 1 parte su 10^{20} che è

$$100\,000\,000\,000\,000\,000\,000$$

cioè 1 parte su cento miliardi di miliardi. (Ogni 9 zeri c'è un miliardo).

BOZZA - DRAFT

6.19 Proporzioni [07]

Si dice *proporzione* la *relazione quaternaria* (cioè fra 4 numeri)

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{w} \qquad \text{classicamente scritta} \quad x : y = z : w$$

ma talvolta si trova anche :: invece del segno =.
Non sottolineeremo qua la corrispondenza del concetto con la realtà sensibile, dovuta essenzialmente alla natura del prodotto e della divisione, supponendola nota dagli studi elementari.

Osserviamo invece che per l'operazione di divisione, oltre alle notazioni già viste,

$$\frac{x}{y} \qquad x/y \qquad x : y \qquad x \div y$$

in ambito farmaceutico, anche in Italia, si usa la parola **per** ("24 mg per ml", "27,6 mg di sodio per 20 ml"), che noi sempre trascriveremo come frazione.

$$\text{Per esempio:} \quad 12 \text{ mg per ml} \quad \text{scriveremo} \quad \frac{12 \text{ mg}}{1 \text{ ml}}$$

ESERCIZIO Si abbia una boccetta di 10 ml di un farmaco X etichettata "15 mg per ml". Quanti millilitri (ml) bisognerà iniettare per somministrare una dose di 75 mg?

Svolgimento. Riscriviamo l'indicazione in etichetta nella forma

$$\frac{15 \text{ mg}}{1 \text{ ml}}$$

e produciamo la proporzione

$$\frac{15 \text{ mg}}{1 \text{ ml}} = \frac{75 \text{ mg}}{x \text{ ml}} \qquad / \cdot \frac{1 \text{ ml} \cdot x \text{ ml}}{15 \text{ mg}}$$

$$x \text{ ml} = \frac{75 \text{ mg} \cdot 1 \text{ ml}}{15 \text{ mg}} =$$

$= 5$ ml (e li abbiamo: la boccetta ne contiene 10).

$$\boxed{5 \text{ ml}}$$

NOTA 1. È ben evidente l'importanza di **calcolare esattamente i dosaggi** in Farmacia. Ci sono stati errori fatali. (Plausibilmente sono numerosissimi e solo in minima parte vengono scoperti).
Ecco cosa consiglia(va) il Royal College of Nursing inglese online:

BOZZA - DRAFT

When you have completed your calculation, remember to check your work. Here's a reminder of the ways you might do this:

- repeat the calculation
- ask a colleague to check your answer
- try to calculate the answer again using a different method
- check against the recommended dose range (e.g. using the British National Formulary)
- look for unusually big or small answers.

BOZZA - DRAFT

NOTA 2. Sebbene esuli dagli obiettivi di questo testo elementare di matematica, si noti che il millilitro (corrispondente al centimetro cubo) può trovarsi indicato **online di fatto** (nei cataloghi di farmaci) sia con ml che mL ma qualcuno scrive anche *diversamente*, in un modo che potrebbe in via ipotetica confondersi con altro multiplo del litro. E si faccia anche ben attenzione a distinguere la l minuscola dal numero 1...

ESERCIZIO$_\mu$
Una pillola contiene una polvere costituita da $2.5\,mg$ di principio attivo e $300\,mg$ di eccipiente. Quanto principio attivo contiene $1\,kg$ della polvere?

SVOLGIMENTO
Una pillola contiene $(300 + 2.5)\,mg$ di polvere e allora si ha subito la proporzione

$$2.5\,mg : 302.5\,mg = x\,mg : 1\,kg$$

ovvero con scrittura più moderna

$$\frac{2.5\,mg}{302.5\,mg} = \frac{x\,mg}{1\,kg} \qquad \Big/ \cdot 1\,kg$$

trovandosi

$$x\,mg = \frac{2.5}{302.5} \cdot 1\,kg =$$

$$= \frac{2.5}{302.5} \cdot 10^6\,mg =$$

$$\boxed{8\,264.46\,mg}$$

(Circa 8 grammi e un quarto).

BOZZA - DRAFT

6.20 ESERCIZI SULLA LEZIONE 6

6.20.1 Esercizio risolto a – Dosaggio in mg/kg/die

$_{\mu}$ * A un bambino di 18 kg il pediatra prescrive un antibiotico al dosaggio di

$$50 \text{ mg/kg/die}$$

da suddividere in 2 somministrazioni giornaliere (una ogni 12 ore). In farmacia è disponibile la sospensione orale etichettata "250 mg/5 ml", in flacone da 100 ml.

1. Quanti milligrammi di farmaco deve assumere il bambino ogni giorno?
2. Quanti milligrammi per ogni somministrazione?
3. Quanti millilitri di sospensione per ogni somministrazione?
4. Per quanti giorni *completi* di terapia basta un flacone?
5. La terapia prescritta dura 7 giorni: quanti flaconi servono?

BOZZA - DRAFT

SVOLGIMENTO

1. La scrittura tipica della Farmacia mg/kg/die significa (mg/kg)/die, cioè $\frac{\text{mg}}{\text{kg}\cdot\text{die}}$ e si moltiplica per il peso del paziente e i chilogrammi si semplificano:

$$50 \frac{\text{mg}}{\text{kg}\cdot\text{die}} \times 18 \text{ kg} = 50 \cdot 18 \frac{\text{mg}}{\text{die}} =$$

$$\boxed{900 \text{ mg/die}}$$

2. La dose giornaliera va divisa in 2 somministrazioni:

$$\frac{900 \text{ mg}}{2} =$$

$$\boxed{450 \text{ mg per somministrazione}}$$

3. L'etichetta 250 mg/5 ml si scrive come frazione, $\frac{250 \text{ mg}}{5 \text{ ml}}$, e impostiamo la proporzione

$$\frac{250 \text{ mg}}{5 \text{ ml}} = \frac{450 \text{ mg}}{x \text{ ml}} \qquad / \cdot \frac{5 \text{ ml} \cdot x \text{ ml}}{250 \text{ mg}}$$

$$x \text{ ml} = \frac{450 \text{ mg} \cdot 5 \text{ ml}}{250 \text{ mg}} =$$

9 ml per somministrazione

4. Ogni giorno si consumano $2 \cdot 9 = 18$ ml di sospensione. Con la divisione euclidea di 100 per 18:

$$100 = 18 \cdot 5 + 10$$

cioè quoziente 5 e resto 10: dopo 5 giorni restano 10 ml, che non bastano per un sesto giorno (ne servirebbero 18).

5 giorni completi

5. Per 7 giorni servono $7 \cdot 18 = 126$ ml, più dei 100 ml di un flacone:

2 flaconi

BOZZA - DRAFT

Verifica (come raccomanda il Royal College of Nursing, rifacendo il calcolo *con un metodo diverso*). Dividiamo subito il dosaggio per le 2 somministrazioni: $50/2 = 25$ mg/kg per somministrazione, e $25 \cdot 18 = 450$ mg. Poiché 5 ml contengono 250 mg, 1 ml ne contiene 50, e $450/50 = 9$ ml. ✓
E l'ordine di grandezza è plausibile: qualche millilitro per dose, per un bambino, non qualche decimo né qualche centinaio.
(Questo visto è un esercizio di carattere didattico: nella pratica i dosaggi vanno sempre verificati sulla prescrizione e sul Riassunto delle Caratteristiche del Prodotto).

6.20.2 Esercizio risolto b – Equazione lineare

$_{\mu}$ ≈ Risolvere

$$\sqrt{2}\,x - 9 = \frac{7}{5}\,x$$

SVOLGIMENTO

$$\sqrt{2}\,x - 9 = \frac{7}{5}\,x \quad \Big/ + \left(9 - \frac{7}{5}\,x\right)$$

$$\sqrt{2}\,x - \frac{7}{5}\,x = 9$$

$$\left(\sqrt{2} - \frac{7}{5}\right)x = 9 \quad \Big/ : \left(\sqrt{2} - \frac{7}{5}\right) \neq 0$$

$$x = \frac{9}{\sqrt{2} - \frac{7}{5}}$$

che è la soluzione esatta, che adesso approssimiamo numericamente:

$$\approx \frac{9}{1.414214 - 1.4} =$$

$$= \frac{9}{0.014\,214} \approx$$

$$\boxed{633.2}$$

Su WolframAlpha LINK->

6.20.3 Esercizio tanto carino quanto capriccioso

ESERCIZIO$_{\mu}$ $*$ Calcolare

$$2^{3^4}$$

SVOLGIMENTO Si calcola prima $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

$$2^{3^4} =$$

$$= 2^{81} =$$

cioè

$$2 \cdot 2 \cdot \ldots (\text{c'è in tutto 81 volte il 2}) \ldots \cdot 2 =$$

si fa 2^81 con WolframAlpha (oppure si calcola a mano 😐)

$$\boxed{2\,417\,851\,639\,229\,258\,349\,412\,352}$$

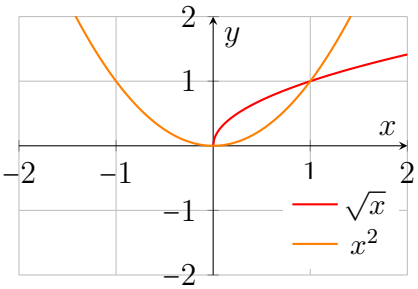
BOZZA - DRAFT

7 Ripasso di Algebra – II parte

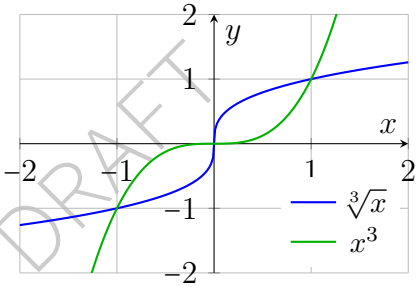
7.1 Le radici [13]

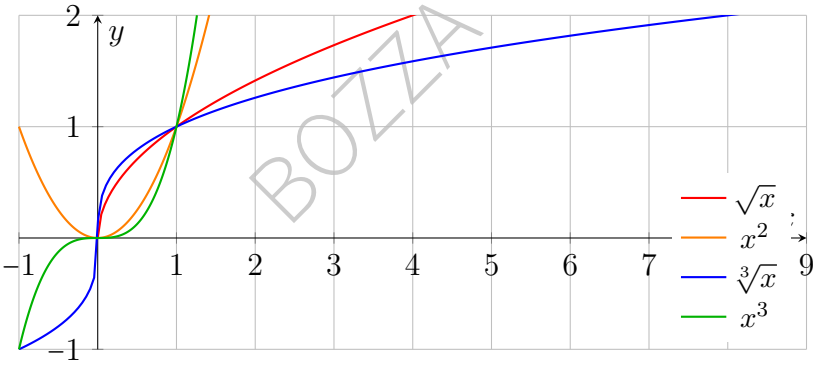
In questa trattazione elementare, considereremo le radici solo in $\mathbb{R}$ e non nei numeri naturali, interi e razionali.
Sono funzioni (e allora anche operazioni unarie ma non è il modo migliore di considerarle).

Radice quadrata e quadrato



Radice cubica e cubo





BOZZA - DRAFT

• *Radice quadrata* $\sqrt{a}$. Ovvero, ma in generale non scriveremo così, $\sqrt[2]{a}$. (Su WolframAlpha `Sqrt[a]`, in altri software `sqrt(a)`).

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

$$\sqrt{\cdot} \; : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$$

Per $x \geq 0$ la $\sqrt{x}$ è definita come il numero $y \geq 0$ tale che $y^2 = x$. Cioè **la radice quadrata (di un numero non negativo) è l'unico numero non negativo che elevato al quadrato dà il numero inizialmente considerato.**
Si noti che

$$\sqrt{9} = 3$$

nel modo più assoluto la radice quadrata di 9 non è ± 3. (Come invece affermano testi che seguono un'antiquata definizione di radice quadrata).

• *Radice quarta, sesta, ottava...* $x \mapsto \sqrt[4]{x}$, $x \mapsto \sqrt[6]{x}$... Con considerazioni analoghe alla radice quadrata. In particolare, la radice quarta (di un numero non negativo) è l'unico numero non negativo che elevato alla quarta dà il numero inizialmente considerato. Per esempio la radice quarta di 16 è 2, e quella di 9 è $\sqrt{3}$. Sono definite in $[0, +\infty[$.

• *Radice terza (o cubica), quinta, settima...* $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, $x \mapsto \sqrt[5]{x}$...
La $\sqrt[3]{x}$ è definita come il numero y tale che $y^3 = x$, e similmente le altre radici con indice dispari: $\sqrt[3]{\cdot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Per esempio la radice cubica di -8 è -2.

Esempio$_\mu$
Usando la Formula di Keys che, fra i numerosi standard, calcola

$$peso\, ideale\, uomini = (statura\, in\, metri)^2 \times 22.1$$

troviamo quale dovrebbe essere l'altezza corrispondente ai 53 kg:

$$53 =^{EQ} x^2 \times 22.1 \quad \Big/ : 22.1$$

$$x^2 = \frac{53}{22.1} \approx 2.39819 \quad \text{(con la calcolatrice)}$$

$x_1 = -\sqrt{2.39819}$ esclusa, dev'esser positivo (altezza)
$x_2 = \sqrt{2.39819}$
che con la calcolatrice troviamo esser circa 1.55 (in metri).

BOZZA - DRAFT

Nota. La radice quadrata esprime un'infinità di altre cose nelle Scienze Applicate, per esempio il tempo di caduta[12] di un grave. Fra quelle espresse dalla radice cubica citiamo il raggio[13] di una sfera di massa m e densità d.
Per esempio si calcola che una sfera d'oro di 1 kg ha diametro $\approx 4.62\, cm$.
Fra le meno numerose ricorrenze nelle Scienze Applicate della quarta potenza ovvero equivalentemente della radice quarta, citiamo la Legge di Stefan-Boltzmann e la legge di Poiseuille.
Le radici dalla quinta in poi ricorrono moderatamente nelle Scienze Applicate.
Una radice sesta compare in un calcolo relativo al Potenziale di Lennard-Jones della Termodinamica.

[12] La formula è $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.
[13] La formula è $r = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi d}}$.

7.2 Proprietà dei radicali ovvero radici [20]

$$\sqrt[4]{x} = \sqrt{\sqrt{x}}$$

$$x = \sqrt[3]{x^3} \quad (14)$$

$$(non\ x) \quad |x| = \sqrt{x^2} \quad (15)$$

$$\forall\ x, y \geq 0 \quad \sqrt{x\,y} = \sqrt{x}\,\sqrt{y} \quad (16)$$

$$\forall\ x \geq 0,\ y > 0 \quad \sqrt{x/y} = \sqrt{x}\big/\sqrt{y} \quad (17)$$

(1)

Esistono anche altre proprietà.(18)

Le radici dei numeri ≥ 0 possono essere intese come potenze con esponente frazionario e precisamente

$$\forall x \geq 0 \quad \left[\sqrt[1]{x} = x\right] \qquad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \ldots \quad e\ in\ generale:$$

$$(\forall\ x \geq 0) \qquad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \qquad n = 2, 3 \ldots$$

BOZZA DRAFT

[18] Per il lettore interessato:

$$\sqrt[3]{x\,y} = \sqrt[3]{x}\ \sqrt[3]{y} \quad e\ similmente\ con\ ogni\ indice\ dispari$$

$$\forall\ y \neq 0 \quad \sqrt[3]{x/y} = \sqrt[3]{x}\big/\sqrt[3]{y} \quad e\ similmente\ con\ ogni\ indice\ dispari$$

$$\forall\ x, y\ concordi \quad \sqrt{x\,y} = \sqrt{|x|}\,\sqrt{|y|} \quad e\ similmente\ con\ ogni\ indice\ pari$$

(concordi significa aventi ugual segno)

$$\forall\ x, y\ concordi \quad \sqrt{x/y} = \sqrt{|x|}\big/\sqrt{|y|} \quad e\ similmente\ con\ ogni\ indice\ pari$$

$$\sqrt[n\cdot m]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} \quad per\ esempio \quad \sqrt[6]{x} = \sqrt{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$$

$$\sqrt[nm]{x^m} = \sqrt[n]{x}, \quad n, m = 2, 3, 4 \ldots \text{ (si semplifica m)}$$

e di rarissimo uso $\sqrt[n]{x^\alpha} = (\sqrt[n]{x})^\alpha, \quad x \geq 0,\ \alpha \in \mathbb{R},\ n = 2, 3, 4 \ldots$

In particolare su WolframAlpha calcoliamo la radice n-esima:

$_{numero}$^(1/n) per esempio 11^(1/3) calcola la $\sqrt[3]{11}$.

Ma si noti che

$\sqrt[3]{x}$ esiste per ogni x

$x^{\frac{1}{3}}$ esiste solo per ogni $x \geq 0$

(Però si troverà sicuramente qualche Autore che la pensa diversamente e dirà che $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ per ogni x, che non è una buona idea per sottili motivi).

BOZZA - DRAFT

7.3 Statistica descrittiva: la media geometrica [24]

La media geometrica $GM(x, y)$ di 2 numeri x e y positivi è la radice quadrata del loro prodotto:

$$GM(x, y) := \sqrt{x \cdot y}$$

La media geometrica $GM(x, y, z)$ di 3 numeri x, y e z positivi è la radice cubica del loro prodotto:

$$GM(x, y, z) := \sqrt[3]{x \cdot y \cdot z}$$

La media geometrica $GM(x, y, z, w)$ di 4 numeri x, y, z e w positivi è la radice quarta del loro prodotto:

$$GM(x, y, z, w) := \sqrt[4]{x \cdot y \cdot z \cdot w}$$

Più in generale, la media geometrica $GM(x_1, ...x_n)$ di n numeri x_1,...,x_n positivi è la radice n-esima del loro prodotto:

$$GM(x_1, ..., x_n) := \sqrt[n]{x_1 \cdot ... \cdot x_n}$$

ESERCIZIO – MEDIA GEOMETRICA$_{\mu 2025}$ ≈ Abbiamo 2 capsule di Petri con diverse quantità di microbi, e vogliamo fare una media. I numeri sono diversissimi, da decine di milioni a miliardi, e allora per riassumerli in un solo valore una scelta ragionevole potrebbe essere la media geometrica. Calcolare la media geometrica per i valori

1.2E7 4.2E9

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard del punto decimale.

$$\sqrt{1.2 \cdot 10^7 \cdot 4.2 \cdot 10^9} =$$
$$= \sqrt{(1.2 \cdot 4.2) \cdot 10^{7+9}} =$$
$$= \sqrt{5.04 \cdot 10^{16}} =$$
$$= \sqrt{5.04}\sqrt{(10^8)^2} \approx$$
$$\approx 2.244\,994 \cdot 10^8 \approx$$
$$\boxed{\approx 2.245 \cdot 10^8}$$

o anche

$$\boxed{\approx 2.24 \cdot 10^8}$$

o anche

$$\boxed{\approx 2.2 \cdot 10^8}$$

BOZZA - DRAFT

7.4 Un confronto fra media aritmetica e geometrica [28]

Per 2 numeri positivi diversissimi, diciamo uno più del centuplo dell'altro, la media aritmetica è praticamente la metà di quello più grande: in qualche modo, va quasi completamente persa l'informazione data dal minore dei 2 numeri. Per esempio sono praticamente uguali (circa 1E9, un miliardo) le medie aritmetiche dei 2 numeri 2E5, 2E9 e dei 2 numeri 2E3, 2E9. Le 2 medie geometriche sono diversissime. Ma l'importanza della media geometrica va molto oltre tutto ciò.

7.5 Altre ricorrenze della radice quadrata in Farmacia [30]

Il significato fondamentale della radice quadrata $\sqrt{x}$ è il lato del quadrato di area x: se per la nostra bella farmacia vogliamo un magazzino quadrato di 400 metri quadrati, deve avere i lati di 20 metri.
Ma vediamo esempi più specifici della Farmacia.

Esempio 1: La Formula di Mosteller per l'area corporea.
Nella chemioterapia per il cancro spesso i dosaggi sono stabiliti non in funzione del peso del paziente – com'è per tanti farmaci – bensì dell'area della superficie corporea.
Una delle formule usate per stimarla è questa di Mosteller, che ha 3 versioni che sono equivalenti per le proprietà delle radici:

$$BSA_{m^2} := area \approx \sqrt{\frac{altezza_{cm} \times peso_{kg}}{3\,600}} =$$

$$= \frac{\sqrt{altezza_{cm} \times peso_{kg}}}{60} = \frac{\sqrt{altezza_{m} \times peso_{kg}}}{6}$$

(che dà circa 2 m^2 per un maschio adulto normale).

BOZZA - DRAFT

Prova tu stesso. Stimare la propria area corporea. ☥

Esempio 2. La radice quadrata rientra nel calcolo della varianza e dello stimatore della varianza, che vedremo, di amplissimo uso in Statistica Medica.

Esempio 3. Nell'articolo scientifico il cui abstract è in https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/19712746 modellizzano l'accrescimento di una comunità microbica con l'uso della radice quadrata.

Esempio 4. Un cerotto quadrato, ma in realtà – come si dimostra – di qualunque forma, con area quadrupla di un altro con la stessa forma, ha misure lineari doppie: lati se quadrato, diametro se circolare, eccetera. $\sqrt{4} = 2$:

il quadrato di area quadrupla ha lato doppio
il cerchio di area quadrupla ha raggio doppio
il cerchio di area quadrupla ha diametro doppio

E similmente per ogni figura piana[19] e per ogni coppia di numeri t e $\sqrt{t}$. Cioè similmente avviene non solo con 4 e 2, ma con ogni numero positivo e la sua radice quadrata, per esempio 9 e 3.[20]

7.6 La radice cubica in Medicina e Farmacia [34]

Il significato fondamentale della radice cubica $\sqrt[3]{x}$ è il lato del cubo di volume x: se per la nostra bella farmacia vogliamo un magazzino cubico di 1000 metri cubi, deve avere i lati di 10 metri.
Ma vediamo esempi più specifici della Farmacia.

BOZZA DRAFT

Ottuplicare peso raddoppiando raggio o lunghezza

Supponiamo di voler *ottuplicare* il peso di compresse sferiche (omogenee) che andremo a produrre, rispetto al peso di quelle che già

[19] *Misurabile*: se è così irregolare da non avere area finita, quelle affermazioni sulla sua area sono prive di senso.

[20] Si voglia moltiplicare per 2 (o rispettivamente per 3, per 4, per qualunque $c > 0$) l'area di un cerotto terapeutico quadrato. Ciò si ottiene moltiplicando il lato per $\sqrt{2}$ (o rispettivamente per $\sqrt{3}$, per 2, per $\sqrt{c}$). perché da

$$area = lato^2$$

segue, essendo *lato* un numero positivo,

$$lato = \sqrt{area}$$

e sostituendovi $area$ con $2 \cdot area$ si ottiene

$$lato_{new} = \sqrt{2 \cdot area} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{area} = \sqrt{2} \cdot lato$$

e similmente con 3, con 4, con c.

Tutto ciò è vero non solo per il quadrato e il suo lato, ma anche per il cerchio e il suo raggio, e pure per il cerchio e il suo diametro.
Con qualche precisazione sul significato delle parole, tali corrispondenze

$$c \times area \leftrightarrow \sqrt{c} \cdot misura\,lineare$$

valgono per qualunque figura geometrica piana, e non solo per il quadrato e il cerchio: una figura – per esempio una macchia d'olio su un liquido – di area quadruplicata rispetto a un'altra, ha misure lineari doppie.

produciamo. Allora[21] il raggio, e quindi il diametro, *raddoppieranno*.

Con qualche precisazione sul significato delle parole, un tale[22] raddoppio all'ottuplicare del peso (o equivalentemente del volume) vale per qualunque figura geometrica, non solo la sfera; per esempio per il cubo relativamente al suo lato. (E il 2 implicato, è la radice cubica dell'8).
Anche un cane o un gatto o una cavia, nella crescita nel corso del tempo – ammesso, in via approssimata, che l'accrescersi dell'animale nel tempo ne conservi la "forma" (in senso tecnico geometrico si tratta della *similitudine*):

se ottuplica il volume raddoppia la lunghezza

se moltiplica volume per c, moltiplica la lunghezza per $\sqrt[3]{c}$

Certo se invece di crescere normalmente, piuttosto ingrassa, non è più vero, non conservandosi la forma.
Per due flaconi di medicine di ugual "forma", uno ingrandimento dell'altro, se il primo ha volume ottuplo del secondo, allora ha altezza doppia.

BOZZA - DRAFT

Tutto ciò è vero non solo per i numeri 8 e 2, ma anche per 27 e

[21] Infatti dalla formula del raggio della sfera di massa m e densità d (che non ci proponiamo di imparare a memoria)

$$r = \sqrt[3]{\frac{3\,m}{4\,\pi\,d}}$$

sostituendo m con $8\,m$ abbiamo

$$r_{new} = \sqrt[3]{\frac{3\cdot 8\,m}{4\,\pi\,d}} = \sqrt[3]{8\cdot\frac{3\,m}{4\,\pi\,d}} =$$

per la proprietà $\sqrt[3]{x\,y} = \sqrt[3]{x}\,\sqrt[3]{y}$ (v. nota alle proprietà dei radicali)

$$= \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{\frac{3\,m}{4\,\pi\,d}} = 2\,r.$$

[22] E più in generale la corrispondenza

$$c\times volume \leftrightarrow \sqrt[3]{c}\cdot misura\,lineare$$

3, e per ogni $c > 0$ e $\sqrt[3]{c}$.

7.7 Esempi di calcolo con le radici. [37]

$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ (perché è $\sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2}$) e approssimeremo ≈ 2.828
$\sqrt{9} = 3$ (assolutamente non ± 3)
$\sqrt{10} \approx 3.162$ e lo troveremo con la calcolatrice
$\sqrt[3]{-8} = -2$ (perché $(-2)(-2)(-2) = -8$)
$\sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$ (perché è $\sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3}$)
$\sqrt[3]{5}$ lo lasceremo come sta. (WolframAlpha con 5^(1/3) dà $1.7099...$).
$\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$ (perché è $\sqrt{\sqrt{4}}$) e approssimeremo ≈ 1.414
$\sqrt[4]{5} \approx 1.495$ (calcolato come radice quadrata della radice quadrata).

BOZZA - DRAFT

7.8 Ordinamento dei numeri [39]

Da $\mathbb{N}$ in poi esiste nei numeri un *ordinamento* (che sostanzialmente supponiamo noto) per cui dati 2 numeri, o il primo è < del secondo, o > del secondo, o sono uguali (*tricotomia*). In modo ovvio si definiscono il *maggiore o uguale* e il *minore o uguale*.

Da $\mathbb{N}$ in poi si può sommare ad ambo i membri di un'uguaglianza, o di una disuguaglianza, una stessa *quantità* (fissa, cioè un numero, o variabile, come una funzione) conservando l'uguaglianza, o rispettivamente quella stessa disuguaglianza:

$$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c \quad e\, analoghe\, con\ \geq, <, \leq, =$$

Da $\mathbb{Z}$ in poi vale questa molteplice relazione fra moltiplicazione e ordinamento dei numeri:

$$a > b \Rightarrow \begin{cases} ac > bc & se\, c > 0 \quad \text{si conserva l'ordinamento} \\ ac < bc & se\, c < 0 \quad \text{si inverte l'ordinamento} \end{cases}$$

e del tutto similmente con $\geq$ e $\leq$

$$a \geq b \Rightarrow \begin{cases} ac \geq bc & se\ c > 0 \quad \text{si conserva l'ordinamento} \\ ac \leq bc & se\ c < 0 \quad \text{si inverte l'ordinamento} \end{cases}$$

Per esempio da $3 > 2$ segue moltiplicando per il numero positivo 10 che $30 > 20$, invece moltiplicando per il numero negativo -10 l'ordinamento si inverte: $-30 < -20$.

7.9 Altre formule classiche dell'algebra [42]

Ecco alcune altre formule classiche dell'algebra:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0 \quad \text{Legge di annullamento del prodotto}$$

BOZZA - DRAFT

E ce ne sono moltissime altre, di cui alcune nella sezione di Complementi a questa Lezione.

7.10 Radici quadrate e cubiche, ed elettrocardiogrammi [44]

In un certo calcolo relativo agli elettrocardiogrammi dal 1920 sono usate alternativamente queste 2 formule

$$\frac{a}{\sqrt{b}} \qquad \text{Formula di Bazett}$$

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b}} \qquad \text{Formula di Fridericia}$$

e in seguito ne sono state proposte altre ancora, rimanendo nell'incertezza su quale sia la migliore. Leggiamo infatti in un articolo[23] scientifico (2018) su 5 formule, per neonati:

> There is an almost endless controversy regarding the choice of the (...) formula to be used in electrocardiograms (...) in neonates for screening for long QT syndrome (...). We compared the performance of four commonly used formulae and a new formula derived from neonates.
> (...) Bazett's (...), Fridericia's
> (...) The Bazett's (...) can be used with confidence in neonates

Cioè per i neonati consiglia la formula con la radice quadrata. Ma un altro[24] studio, fatto su maschi adulti, dice che funziona meglio la radice cubica:

> 881 middle-aged men (...) the cubic root equation might be more accurate than the square root

BOZZA - DRAFT

7.11 La Medicina non è una Scienza Esatta [47]

Leggendo il paragrafo precedente, viste anche le implicazioni farmacologiche, sia un matematico che uno studente di Farmacia o CTF all'inizio dei suoi studi potrebbero restare alquanto sorpresi: radice quadrata e cubica possono dare valori piuttosto diversi, e dai due articoli non si evince un'età soglia in cui cambiare formula, e comunque entrambi gli articoli parlano di esistente incertezza, che cercano di dirimere almeno nelle due classi di età considerate.
Ma la Medicina non è una Scienza Esatta, e simili differenze di opinione fra i vari Medici – in questo caso su quale formula è migliore – non

[23] Stramba-Badiale M, Karnad DR, Goulene KM, Panicker GK, Dagradi F, Spazzolini C, Kothari S, Lokhandwala YY, Schwartz PJ. For neonatal ECG screening there is no reason to relinquish old Bazett's correction. Eur Heart J. 2018 Aug 14;39(31):2888-2895. doi: 10.1093/eurheartj/ehy284. PMID: 29860404.

[24] Puddu PE, Jouve R, Mariotti S, Giampaoli S, Lanti M, Reale A, Menotti A. Evaluation of 10 QT prediction formulas in 881 middle-aged men from the seven countries study: emphasis on the cubic root Fridericia's equation. J Electrocardiol. 1988 Aug;21(3):219-29. doi: 10.1016/0022-0736(88)90096-9. PMID: 3171455.

devono sorprendere.
Similmente, durante la pandemia (2020-2023) varie virostar si sono vicendevolmente contraddette – e perfino insultate – proponendo tesi diverse: non è che non sappiano usare la calcolatrice o il microscopio, è che usano modelli diversi, opinabili.

7.12 Il volùbil aspartame [48]

Da (LINK ->, letto il 14 ottobre 2023) Rainews del 14 luglio 2023:

> L'aspartame è "probabilmente" cancerogeno, lo ha stabilito l'OMS

Ancora il 16 ottobre 2023 leggiamo sul sito web dell'EFSA in https://www.efsa.europa.eu/it/topics/topic/aspartame

> L'aspartame è un edulcorante artificiale
> (...) L'edulcorante e i suoi prodotti di degradazione sono autorizzati per il consumo umano da molti anni sulla base di approfondite valutazioni della sicurezza.

BOZZA DRAFT

Prima però l'aspartame non era classificato come cancerogeno: è avvenuto un cambiamento di opinione scientifica nel corso del tempo. (Precisazione: l'Agenzia Internazionale per la Ricerca sul Cancro dell'OMS lo ha posto nel gruppo 2B, *possibilmente* cancerogeno per l'uomo, non nel gruppo 2A, *probabilmente* cancerogeno: il titolo giornalistico è impreciso, e anche questo è istruttivo). Il cambiamento è avvenuto sulla base – nelle sue varie forme – della Statistica Medica.

In questo caso però il cambiamento sul piano pratico non è drammatico: continuiamo da RaiNews:

> Nonostante la probabile pericolosità, l'OMS non propone di ridurne la quantità giornaliera consigliata. Esulta l'industria, delusi gli attivisti

Il passaggio da sospetti ad articoli scientifici a pareri non vincolanti a leggi che proibiscano l'uso di determinate sostanze è, diciamo così, molto lento: per l'amianto in Italia molti decenni. Per il biossido di titanio (E171), vietato negli alimenti nell'UE dal 2022 ma ancora usato come colorante nei farmaci, la decisione si è fatta attendere anni.

* Complementi *

7.13 Complementi – Ulteriori formule classiche

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 - b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - a\,b + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + a\,b + b^2)$$

$$a^4 + b^4 = \left(a^2 - \sqrt{2}\,a\,b + b^2\right)\left(a^2 + \sqrt{2}\,a\,b + b^2\right)$$

(E l'ultima, poco nota, sorprenderà più di qualcuno).

BOZZA - DRAFT

7.14 ESERCIZI SULLA LEZIONE 7

7.14.1 Esercizio risolto a – Area corporea

ESERCIZIO$_{\mu 2020}$ % Il dosaggio di particolari farmaci dipende dalla superficie corporea. Una delle formule approssimate (Formula di Mosteller) dà

$$superficie_{m^2} = \sqrt{\frac{altezza_{cm} \times peso_{kg}}{3\,600}}$$

Prendiamo per buona questa formula (senza discuterne eventuali limiti alla validità). Se un fissato individuo conservando la sua altezza raddoppia il peso, di quanto aumenterebbe la sua superficie corporea?

SVOLGIMENTO Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard del punto decimale, a scelta).

$$\frac{superficie\ finale}{superficie\ iniziale} =$$

detta h_0 l'altezza, e p_0 il peso iniziale e allora $2\,p_0$ quello finale

$$= \frac{\sqrt{\frac{h_0 \cdot 2\,p_0}{3\,600}}}{\sqrt{\frac{h_0 \cdot p_0}{3\,600}}}$$

si semplifica tutto tranne $\sqrt{2}$

$$= \sqrt{2} \approx 1{,}41$$

$$\boxed{\approx 41\%}$$

(Nella pratica, appare ragionevole non fare alcun affidamento sull'esattezza della cifra delle unità; diciamo piuttosto che, col modello della Formula di Mosteller, ad un raddoppio del peso conservando l'altezza corrisponde un aumento circa del 40% della superficie corporea).

BOZZA - DRAFT

7.14.2 Esercizio risolto b – Mortalità fra ricoverati

ESERCIZIO$_{\mu 2020}$ $*$ Supponiamo che di 24391 ricoverati per una nuova malattia muoiano 8123. Si esprima a parole (divulgativamente) la situazione con un'espressione approssimata come

"morti 2 su 3" oppure "morto 1 su 4".

SVOLGIMENTO

Si ha

$$\frac{morti}{ricoverati} = \frac{8123}{24391} \approx$$

con la calcolatrice

$$\approx 0.33303$$

che riconosciamo essere circa $\frac{1}{3} = 0.33333... = 0.\overline{3}$ e allora, a parole e approssimativamente:

morto 1 su 3

BOZZA - DRAFT