8 Funzioni

Una legge che ad ogni elemento di un insieme D detto *dominio* associa 1 elemento di un insieme C detto *codominio* si chiama *funzione* definita in D a valori in C:

$$f : D \to C$$

Ad ogni funzione daremo un nome, di solito di 1 lettera[1], per esempio f oppure g oppure y oppure a, e la *variabile indipendente*, che varia nel dominio, la indicheremo con un nome qualsiasi, di solito di 1 lettera, per esempio scriveremo queste 2 classiche funzioni

$$f(x) := 2\,x \qquad g(x) := x^2$$

(2)

Al di fuori della Matematica, per esempio in Chimica e soprattutto in Informatica, è normale dare alle funzioni nomi di più lettere, per esempio pH, `STIPENDIO`, `IVA_2026`.

In questo testo elementare funzione è una legge ovvero regola che a elementi associa elementi. Per esempio ai numeri associano il loro doppio o il loro quadrato, oppure alle persone il cognome o il codice fiscale o il numero dei farmaci che assumono.

BOZZA - DRAFT

[1] Una funzione con nome di più lettere, anche con la variabile di più lettere, potrebbe per esempio essere $area(lato) = lato^2$, che dà l'area del quadrato in funzione del lato.

[2] E poi sarà per esempio $g(2y) = 4y^2$, e $g(\alpha + 1) = \alpha^2 + 2\alpha + 1$ con variabili y e poi α, mentre la g è la funzione di prima.

In Farmacia ricorrono 3 tipi principali di funzioni:

- Funzioni da numeri a numeri, le uniche che chiameremo funzioni numeriche, per esempio

  f : prezzo $\mapsto$ prezzo scontato del 20% cioè $f(x) := 0.8\,x$

- Funzioni da enti che non sono numeri a numeri, che alcuni Autori pure chiamano funzioni numeriche, per esempio

  g : cliente $\mapsto$ numero di acquisti fatti

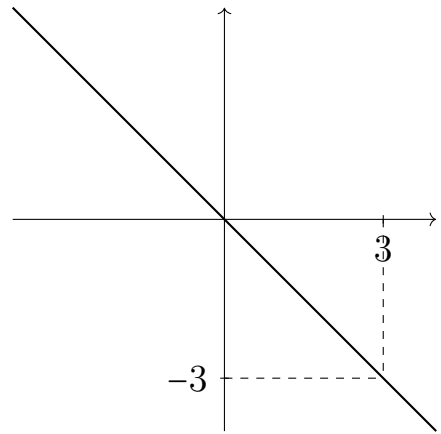
- Funzioni da enti che non sono numeri a enti che non sono numeri, per esempio

  h : essere umano $\mapsto$ suo codice fiscale (quello italiano)

Nei seguenti 5 paragrafi vediamo alcune basiche funzioni numeriche: passaggio a opposto, reciproco, valore assoluto...

BOZZA - DRAFT

8.1 Passaggio all'opposto

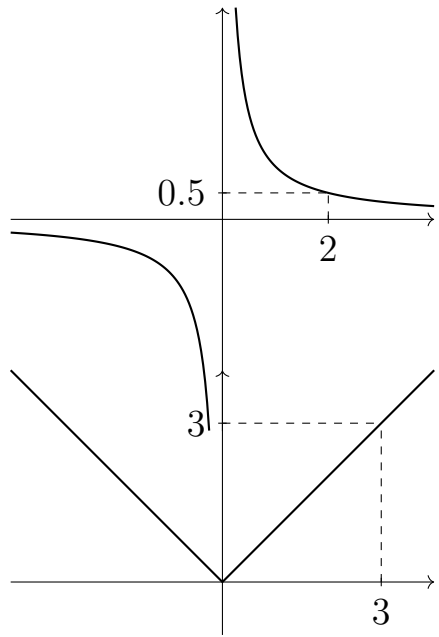


$a(x) := -x$ *passaggio all'opposto*, $x \mapsto -x$. (Definita da $\mathbb{Z}$ in poi). Questo meno non indica affatto negatività ma passaggio all'opposto, per esempio l'opposto di -3 è il positivo 3. (Si noti allora che $-x$ può essere positivo).
Da un punto di vista fisico, il tempo $-2\,h$ significa 2 ore *prima* del tempo 0 dell'inizio di un esperimento.
In Farmacia quest'operazione ricorre in un'infinità di formule, e si noti che sommare il reciproco equivale a sottrarre: $5 - 2$ è $5 + (-2)$.

BOZZA - DRAFT

8.2 Passaggio al reciproco

In $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e cioè nei numeri reali non nulli si definisce[3] la funzione $\frac{1}{x}$ *passaggio al reciproco*, $x \mapsto \frac{1}{x}$
Notazione deprecabile x^{-1} da lasciarsi ai Fisici.
In Farmacia quest'operazione ricorre in un'infinità di formule, e si noti che moltiplicare per il reciproco equivale a dividere: $2 \cdot 3$ è $2 \cdot \frac{1}{3}$.



8.3 Valore assoluto

In $\mathbb{R}$ si definisce[4] la funzione *valore assoluto*

$$|x| := \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$

In Farmacia questa funzione ricorre per esempio nel calcolo dell'errore relativo, questione comunissima.

BOZZA - DRAFT

[3] Questa funzione è definibile già nei razionali non nulli.
[4] Questa funzione è definibile già in $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.

8.4 Complementi – 4 definizioni del valore assoluto

Ecco 4 modi in cui può essere definito il valore assoluto in $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{R}$:

$$|x| := \sqrt{x^2}$$

$$|x| := x\,\mathrm{sgn}(x)$$

$$|x| := \max\{x, -x\}$$

Definizione consigliabile:

$$|x| := \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$

La soprastante parentesi graffa (grande) è *"selettiva dei casi"*, ma quel simbolo ha anche altri usi affini.
In $\mathbb{R}$ il valore assoluto è una *funzione elementare*, mentre nell'algebra dei numeri può considerarsi *operazione unaria*.

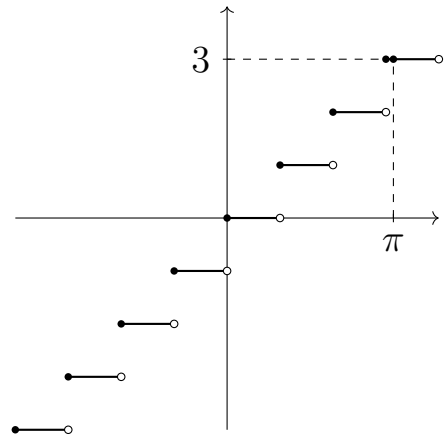
BOZZA - DRAFT

8.5 Parte intera di un numero non negativo

La[5] [6] *parte intera* $\lfloor x \rfloor$ di[7] $x \geq 0$ si ottiene da x togliendogli tutte le cifre decimali diverse da 0 se ne ha.
Un esempio chiarificatore di tutti i casi:

$$\lfloor \pi \rfloor = 3$$

(Abbiamo tolto le cifre decimali 1,4...).
In **Farmacia** questa funzione viene applicata per esempio troncando le età agli "anni compiuti", per cui a 19 anni e 9 mesi ovvero 19.75 anni uno viene classificato come avente 19 *anni compiuti* (non 20, che sarebbe l'arrotondamento).



[5] Una definizione analitica di $\lfloor x \rfloor$ esiste ma non è semplicissima.

[6] Su WolframAlpha è `floor(numero)`

[7] Per i numeri negativi la parte intera è fonte di ambiguità fra i vari Autori e non ce ne occuperemo: la parte intera di $-\pi$ sarà -3 o -4?

BOZZA DRAFT

8.6 Complementi – Funzione segno

In $\mathbb{R}$ si definisce[8] [9] la funzione segno

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1 & se\ x < 0 \\ 0 & se\ x = 0 \\ 1 & se\ x > 0 \end{cases}$$

Per esempio è $\operatorname{sgn}(3 - \pi) = -1$.

Valore assoluto e segno sono correlate dall'identità $x \equiv |x| \cdot \operatorname{sgn}(x)$.

Figure	su WolframAlpha Link->	su WolframAlpha Link->

BOZZA - DRAFT

[8] Questa funzione è definibile già in $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.

[9] Con qualche ambiguità: per alcuni non è definita in 0. In questa trattazione è definita in 0 e vi vale 0, che è lo standard ISO.

8.7 Altri esempi di funzioni numeriche

$a(x) := (1 - 20\%)\, x = 0.8\, x$ scontare del 20% un prezzo x

$b(x) := (1 + 20\%)\, x = 1.2\, x$ aumentare del 20% un prezzo x

$f(x) := 3\, x$ triplicare, per esempio il dosaggio, o un prezzo

$g(x) := \frac{2}{3}\, x$ ridurre di un terzo ovvero del $33.\overline{3}\%$, $\approx 33.3\%$, per esempio un dosaggio, ovvero scontare un prezzo del 33% (circa)

$h(x) := \frac{x}{3}$ ridurre a un terzo ovvero al $33.\overline{3}\%$, $\approx 33.3\%$

$k(x) := \frac{4}{3}\, x$ aumentre di un terzo ovvero del $33.\overline{3}\%$, $\approx 33.3\%$

$m(x) := 2.4\, x$ portare al 240% del valore iniziale ovvero aumentare del 140%

BOZZA - DRAFT

$r(x) := x^3$ elevare alla terza ovvero al cubo

$s(x) := \sqrt[3]{x}$ estrarre la radice terza ovvero cubica, che vedremo

$u(x) := \sqrt{x}$ estrarre la radice quadrata, dom$u$: $x \geq 0$

Vedendo la difficoltà che hanno alcuni
nel distinguere espressioni come
ridurre di un terzo e *ridurre a un terzo*
ci vorrebbe molta cautela nell'usarle
per descrivere una variazione di posologia

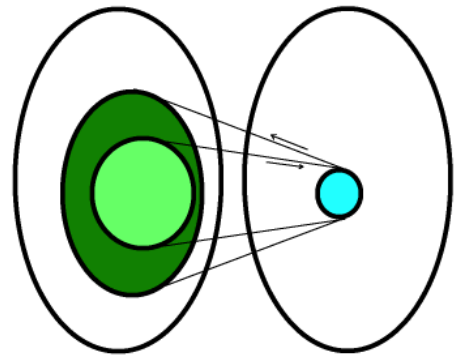
BOZZA - DRAFT

Ma pensateci bene: preferireste

che una multa venga ridotta *di* un decimo, o che venga ridotta *a* un decimo?

8.8 Immagine, controimmagine, composta

In questo paragrafo consideriamo sia funzioni numeriche che funzioni non numeriche.
Si definiscono 2 insiemi e 1 funzione:



- $\mathrm{im} f := \{f(x) \in \mathrm{codom} f | x \in \mathrm{dom} f\}$ immagine di f

- $f^{-1}(E) := \{x \in \mathrm{dom} f | f(x) \in E\}$ controimmagine di un sottoinsieme E di $\mathrm{codom} f$ (ma attenzione alla simbologia del $^{-1}$)

- $f(g(x))$ la funzione composta: si "f-izza" la "g-izzazione" degli elementi, per esempio con $a(t) := t^2$ e $b(t) := t + 1$ si ha

$$a(b(t)) = (t+1)^2 \qquad b(a(t)) = t^2 + 1$$

BOZZA - DRAFT

8.9 Funzione iniettiva, suriettiva, biiettiva, inversa

In questo paragrafo consideriamo sia funzioni numeriche che funzioni non numeriche.

Funzione **iniettiva**: "mai 2 vanno in 1". Per esempio il codice fiscale, o il codice cliente della tessera di fidelizzazione di una farmacia.
Tornando a funzioni numeriche, per esempio x^3 e 2^x ma non x^2 intesa come funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (che è il modo naturale di considerarla).

Figure	su WolframAlpha Link->	su WolframAlpha Link->

Funzione **suriettiva**: "riempie il codominio". Per esempio x^3 ma non x^2 nè 2^x intese come funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (che è il modo naturale di considerarle).

BOZZA - DRAFT

Figure	su WolframAlpha Link->	su WolframAlpha Link->

Funzione ***biiettiva***: iniettiva *et* suriettiva. Per esempio x^3 ma non x^2 nè 2^x intese come funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (che è il modo naturale di considerarle).

Figure	su WolframAlpha Link->	su WolframAlpha Link->

La funzione biiettiva dà luogo in modo ovvio alla *funzione inversa*. Per esempio $\sqrt[3]{x}$ è la funzione inversa di x^3. E viceversa.

Figure	su WolframAlpha Link->

BOZZA - DRAFT

Una funzione

$$f : D \to C$$

biunivoca si può vedere anche come *relazione* fra dominio e codominio e in quel senso si chiama ***corrispondenza biunivoca***

$$f$$

$$D \leftrightarrow C$$

Due insiemi in corrispondenza biunivoca fra loro possono venire identificati a livello astratto.
Esempi:

una la retta orientata $\leftrightarrow$ i numeri reali cioè $\mathbb{R}$
il piano cartesiano $\leftrightarrow$ le coppie di numeri reali ovvero $\mathbb{R}^2$
i 5034 clienti di una certa farmacia $\leftrightarrow$ i numeri di $\{1, 2, 3, ..., 5034\}$
i 26 532 prodotti in vendita $\leftrightarrow$ le stringhe COD00001,...,COD26532

BOZZA - DRAFT

8.10 Crescenza e decrescenza delle funzioni numeriche

Crescenza (globale) e decrescenza (globale) su intervalli, eventualmente sull'intero dominio di una funzione.
Ci sono 4 casi di cui più importanti il 1° e il 3°.

1) se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ allora f si dice crescente.
Esempi: x^3, arctan, lg, ln, exp, $\sqrt{x}$. Anche x^2 per $x \geq 0$.
"A valore minore fa corrispondere valore minore"
Il grafico non può avere tratti orizzontali: solo sale.

2) se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ allora f si dice non decrescente, o crescente in senso debole (ma alcuni Autori la dicono crescente).
"A valore minore fa corrispondere valore minore o uguale"
Il grafico può avere tratti orizzontali.
Esempio epidemiologico: il numero cumulativo ovvero totale di morti di un'epidemia: di giorno in giorno (si tratta di una suc-

BOZZA - DRAFT

cessione x_1, x_2... essendo x_1 il numero di morti nel primo giorno dell'epidemia) cresce oppure rimane uguale al giorno precedente, non può decrescere. (Può decrescere il numero di morti giornaliero, ma non il numero di morti cumulativo).
Esempio matematico: $\lfloor x \rfloor$, parte intera di x.

3) se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ allora f si dice decrescente.
Esempio: e^{-x}. Anche $\frac{1}{x}$ per $x > 0$. Anche x^2 per $x \leq 0$.
"A valore minore fa corrispondere valore maggiore"
Il grafico non può avere tratti orizzontali: solo scende.

4) se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ allora f si dice non crescente, o decrescente in senso debole (ma alcuni Autori la dicono decrescente).
Esempio: $-\lfloor x \rfloor$
"A valore minore fa corrispondere valore maggiore o uguale"

BOZZA DRAFT

Il grafico può avere tratti orizzontali.

Nota 1. x^2, $\sin x$ e $\cos x$ non ricadono in alcuna delle 4 categorie.

Teoremi (ovvi)

Crescente su intervallo $\Rightarrow$ iniettiva.

Decrescente su intervallo $\Rightarrow$ iniettiva.

Nota 2. Esiste anche un'altro tipo di crescenza e decrescenza: quella puntuale (invece che sugli intervalli). Essa corrisponde alla crescenza o decrescenza (della funzione rappresentativa) della retta tangente al grafico, questione che vederemo in seguito.

BOZZA - DRAFT

8.11 Ambiguità notazionale dell'esponente −1



Una delle pù gravi ambiguità notazionali è quella dell'esponente −1, che ha sostanzialmente 3 significati: reciproco, inversa, controimmagine. Attenzione!

Certamente

$$a^{-1}$$

indica inequivocabilmente il reciproco $\frac{1}{a}$ di a se a è un numero, ma se è una funzione – e può ben esserlo – cominciano problemi:

$$f^{-1}(x)$$

in questa trattazione significherà sempre l'inversa di $f(x)$ mentre la reciproca la denoteremo $\frac{1}{f(x)}$ e casomai, volendoci del male, $(f(x))^{-1}$. Il problema maggiore si ha quando – e concretamente ciò viene fatto spesso – in lunghi calcoli per brevità di scrittura si omette di indicare la variabile indipendente, e si scrive f intendendo $f(x)$, lasciando nell'incertezza riguardo la scrittura f^{-1}. Così all'atto pratico ci si ritrova sempre con qualcuno che pensa che l'arcotangente sia il reciproco della tangente, o il logaritmo il reciproco dell'esponenziale (invece

BOZZA - DRAFT

è l'inversa).
Resta il fatto che in un testo diverso da questo, la scrittura

$$\ln^{-1}(x)$$

è ambigua, e può indicare sia $\exp(x)$ che $\frac{1}{\ln(x)}$. In questo testo solo $\exp(x)$, che è l'inversa del logaritmo.

Inoltre, l'esponente -1 è usato per indicare anche tutta un'altra cosa, la controimmagine, che non è un elemento ma un insieme.

BOZZA - DRAFT

8.12 Ambiguità notazionali della parentesi graffa grande

😕

La parentesi graffa grande viene usata con almeno 3 diversi significati.

Li illustreremo con 3 esempi.
Sempre c'è un *et* "retrostante", ma non in modo immediato.

Parentesi graffa (grande) *dei sistemi*, con significato puro e semplice di *et*:

$$\begin{cases} x^2 > 9 \\ x + 1 < 0 \end{cases}$$

Parentesi graffa (grande) *"selettiva dei casi"*:

$$|x| := \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$

Parentesi graffa (grande) *"onnicomprensiva dei casi"*:

$$\cos(2x) = \begin{cases} \cos^2 x - \sin^2 x \\ 2\cos^2 x - 1 \\ 1 - 2\sin^2 x \end{cases}$$

(Nell'esempio sono affermate con scrittura compatta 3 uguaglianze).

BOZZA - DRAFT

8.13 Funzioni definite per numeri naturali: le successioni

Per la variabile indipendente spesso useremo i nomi n, m, h, k se il dominio è un insieme di numeri interi, per esempio $\mathbb{N}$. In questo

caso potremmo dare a tali funzioni nomi $y(n)$ o $a(n)$ ma più spesso useremo le notazioni y_n, a_n e in ogni caso le funzioni definite su $\mathbb{N}$ (o anche su una sua semiretta e cioè per $n \geq n_0$) le chiameremo ***successioni***.

Una successione (definita[10] *analiticamente*) già vista (in **??**) è quella dei fattoriali:

$$1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040...$$

[10] Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si dice *fattoriale* di n e si indica con $n!$ il numero $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ se $n > 0$ e 1 se $n = 0$.
Per esempio $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$; e $11! = 39\,916\,800$.
Esistono estensioni della definizione ai numeri reali e perfino ai numeri complessi mediante la funzione Gamma:

$$z! := \Gamma(z+1), \quad z \neq -1, -2, -3, ...$$

Valgono le approssimazioni di Stirling

$$x! \sim \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

e con maggiore precisione

$$x! \sim \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x\left(1 + \frac{1}{12x}\right)$$

per i numeri interi o reali, purché sufficientemente grandi – diciamo maggiori di 8 per avere un'approssimazione all'1% per la prima e maggiori di 1 per avere un'approssimazione all'1 per mille per la seconda.
Si è usato il simbolo ~ invece di ≈ perché sono approssimazioni asintotiche – questione sottile.

BOZZA - DRAFT

Figura | su WolframAlpha Link->

e si noterà che

si passa da 1 a 2 moltiplicando per 2

si passa da 2 a 6 moltiplicando per 3

si passa da 6 a 24 moltiplicando per 4

e così via:

$$n! := \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n & se \;\; n > 0 \\ 1 & se \;\; n = 0 \end{cases}$$

ovvero, per ricorrenza, $a_0 := 1$, $a_n := n\, a_{n-1}$ per $n > 0$.

Un'infinità di dati epidemiologici si possono inquadrare come successioni (definite *empiricamente)*, con l'indice che è l'anno, per esempio da 1862 in poi e teoricamente estendibile all'infinito almeno nell'immaginazione, e i valori a rappresentare il numero di nati, di morti, la mortalità infantile, e quant'altro:

BOZZA - DRAFT

x_{1862} = ...

x_{1863} = ...

x_{1863} = ...

...

BOZZA - DRAFT

Esempio 1. Morti[11] in Italia, approssimazioni al migliaio:

Anno	Morti
2011	593 000
2012	613 000
2013	601 000
2014	598 000
2015	648 000
2016	615 000
2017	649 000
2018	633 000
2019	634 000
2020	740 000
2021	701 000
2022	715 000
2023	671 000
2024	653 000

BOZZA - DRAFT

[11] Fonte: serie demografiche ISTAT / Demo-Geodemo, "morti" della popolazione residente; una tabella riassuntiva derivata è riportata anche in https://it.wikipedia.org/wiki/Demografia_d, che cita le fonti ISTAT.

Esempio 2. Morti di morbillo in Inghilterra e Galles:
https://www.gov.uk/government/publications/measles-historic-confirmed-cases-r
measles-historic-confirmed-cases-notifications-and-deaths#
measles-notifications-and-deaths-in-england-and-wales-1940-to-2026

Oltre alla successione prima vista (dei morti in Italia) x_{2011}, x_{2014}... (di fatto inevitabilmente troncata) del numero di morti, molto interessante sarebbe rappresentare anche la successione derivata degli incrementi – eventualmente negativi e cioè di fatto diminuzioni – annuali:

$$z_n := x_n - x_{n-1}$$

Spesso in Medicina una tale differenza viene denotata con Δ, per esempio nell'andamento di un qualche parametro di un'epidemia. Δ 24h può indicare l'incremento (eventualmente negativo)

$x_{oggi} - x_{ieri}$.

BOZZA - DRAFT

Spesso sia a livello di rappresentazione grafica che a livello teorico, la successione viene sostituita con una (funzione) interpolante: detto semplificatamente, si “congiungono i puntini" ottenendo una funzione definita su una semiretta di $\mathbb{R}$ invece che su una semiretta di $\mathbb{N}$. (O su un intervallo di $\mathbb{R}$ invece che di $\mathbb{N}$).

Fra gli infiniti grafici di interesse epidemiologico, ottenibili da successioni numeriche (salvo l’inevitabile troncamento a destra, non possiamo andare avanti con gli anni all’infinito) qua scegliamo di mostrarne 2 particolarmente significativi, e il Lettore saprà trovarne un’infinità d’altri.

BOZZA - DRAFT

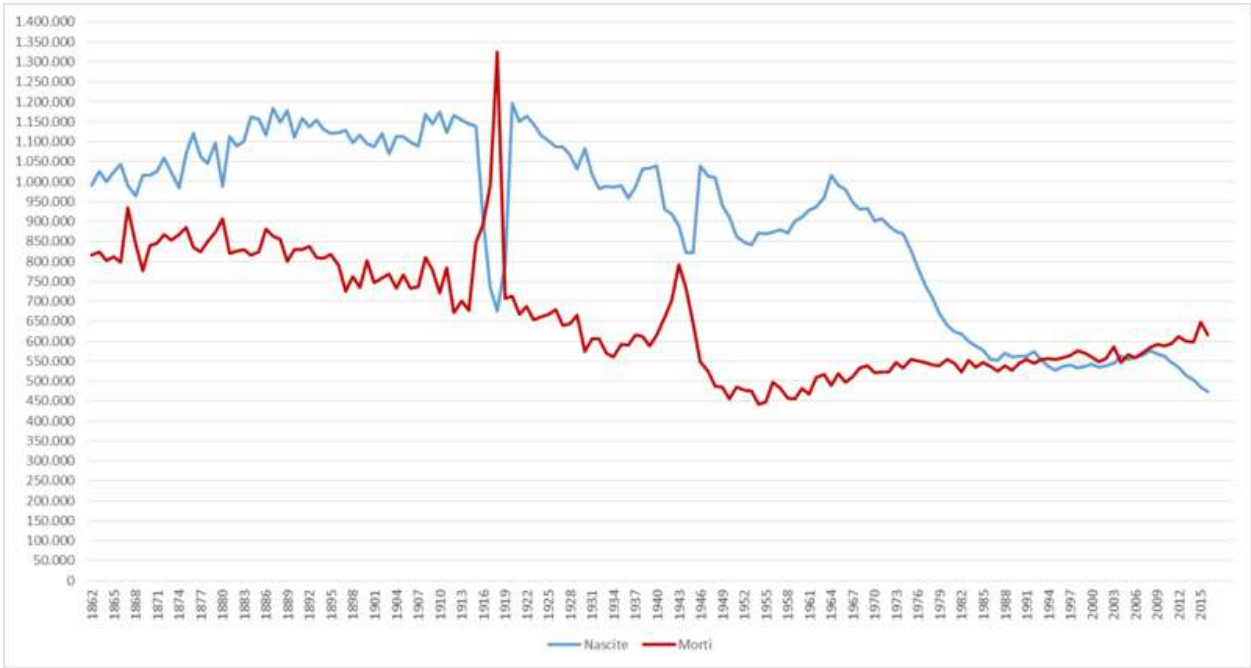


Figura 1: Nascite (blu) e morti (rosso) in Italia tra il 1862 e il 2016. Da https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Nascite_e_morti_in_Italia,_1862_-_2016.png

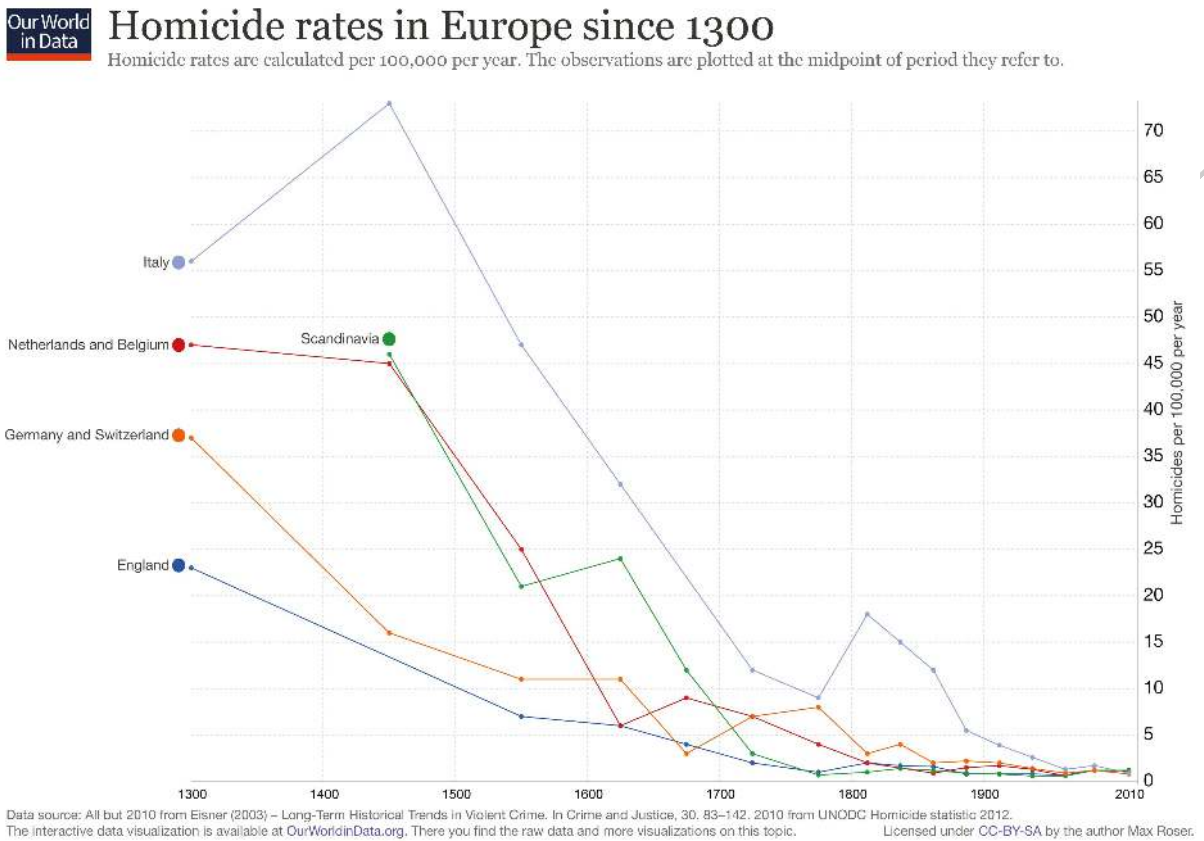


Figura 2: Congetturato tasso di omicidi negli ultimi 7 secoli.

8.14 La successione di Fibonacci

La successione di Fibonacci inizia con 0, 1... oppure con 1, 1... e poi ogni termine è somma dei 2 precedenti:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55... \text{ oppure} \quad (1)$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55... \quad (2)$$

Essa è in qualche modo correlata al tipo di ampliamento di una popolazione di organismi – fu studiata da Fibonacci nel medioevo per modellizzare l'accrescimento di una popolazione di conigli – ovvero anche all'espansione di un'epidemia nella fase iniziale.

Figura | su WolframAlpha Link->

BOZZA - DRAFT

È di solito definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 := 0 \\ a_1 := 1 \\ a_n := a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Poco nota e meno rilevante questa sua definizione in forma chiusa, non ricorrente:

$$\begin{cases} a_n := \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}} \\ n = 0, 1, 2 \ldots \end{cases}$$

con la sezione aurea

$\varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

Sia che la si faccia iniziare con 0 come in (1) sia con 1 come in (2) il primo termine può avere indice 0, oppure 1.

WolframAlpha considera la successione iniziante da 0 e al primo termine dà indice 0, e dà:

0 per `Fibonacci[0]` e lo chiama F_0
1 per `Fibonacci[1]` e lo chiama F_1
1 per `Fibonacci[2]` e lo chiama F_2

2 per `Fibonacci[3]` e lo chiama F_3

BOZZA DRAFT

8.15 Complementi – Fibonacci e Legge di Stigler

Leggiamo (19 settembre 2023) in
https://it.wikipedia.org/wiki/Legge_dell%27eponimia_di_Stigler:

> La legge dell'eponimia di Stigler descrive alcuni aspetti del processo di scoperta scientifica e, in forma estremamente concisa e semplificata, afferma:

«A una scoperta scientifica non si dà mai il nome del suo autore»

> (...) La stessa legge di Stigler è un esempio della propria tesi: la sua scoperta è infatti attribuita da Stigler a Robert Merton.

La successione di Fibonacci fu descritta (iniziando da 1 e 2) dall'Italiano Fibonacci nel 1202 e da lui prende il nome, però era stata descritta mezzo secolo prima dall'indiano d'India Hemachandra e in effetti, nella sostanza, circa un millennio e mezzo prima (con enorme incertezza sui tempi) da un altro indiano d'India, Pingala (che

BOZZA - DRAFT

sostanzialmente fu l'inventore anche del sistema di numerazione binario).

> Hemachandra also comments (...) 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 and in this way, afterwards[12]
>
> (LINK ->)

La successione era comparsa nell'ambito del calcolo combinatorio applicato alla poesia (!) e precisamente alla metrica, nell'alternarsi delle sillabe lunghe e brevi, in sanscrito: tutt'altro che la demografia dei conigli di Fibonacci. D'altra parte, questa interessante successione ricorre in vari altri ambiti.

BOZZA - DRAFT

[12] Parmanand Singh, The so-called fibonacci numbers in ancient and medieval India, Historia Mathematica, Volume 12, Issue 3, 1985, Pages 229-244, ISSN 0315-0860, https://doi.org/10.1016/0315-0860(85)90021-7. (https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0315086085900217)

8.16 ESERCIZI SULLA LEZIONE 8

8.16.1 Esercizio risolto – Successione di Fibonacci

$_{\mu 2024}$ ∗ Si scrivano i primi termini della successione di Fibonacci, da $a_0 = 1$ ad $a_{11} = 144$:

1 1 2 ... 144

Calcolare

$$\frac{a_{11}}{a_{10}}$$

A quale notissima costante matematica si avvicina molto?

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard del punto decimale, a scelta).

I primi 12 termini della successione di Fibonacci, da $a_0 = 1$ ad $a_{11} = 144$, sono, e li scriviamo come richiesto nel quesito,

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144

allora $a_{10} = 89$ e allora

$$\frac{a_{11}}{a_{10}} = \frac{144}{89} \approx 1{,}617\,98$$

BOZZA - DRAFT

vicinissima a questa notissima costante matematica:

sezione aurea

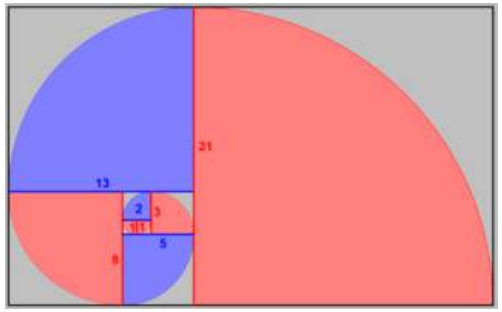
che notoriamente vale circa 1,618 e più precisamente

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618\,03$$

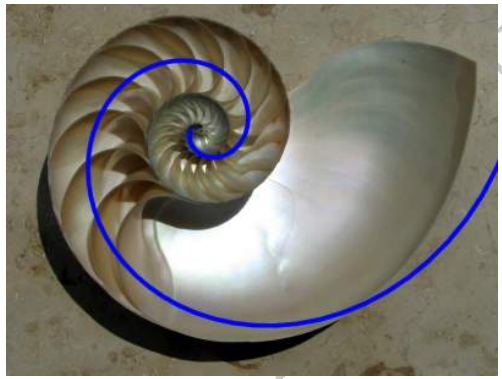
Nota. Il rapporto fra un termine della successione di Fibonacci e il precedente tende, nel senso del limite, esattamente alla sezione aurea φ.
Già $\frac{a_{11}}{a_{10}}$ è molto vicino, come abbiamo sopra visto.

BOZZA - DRAFT

8.16.2 Aneddoti spiraleggianti



Approssimazione di spirale logaritmica, che è connessa alla successione di Fibonacci e alla sezione aurea. By Mabit1 in Wikimedia Commons.



Un vero nautilus con un vera spirale logaritmica. NautilusCutawayLogarithmicSpiral.jpg: Chris 73derivative work: Akkana Peck, CC BY-SA 3.0 via Wikimedia Commons

La successione di Fibonacci compare per esempio nella *spirale logaritmica*,

> indagata estesamente da Jakob Bernoulli, che la definì spira mirabilis, “la spirale meravigliosa", e ne volle una incisa sulla sua lapide

Ma sulla sua pietra tombale fu malamente incisa una banale spirale archimedea, la spirale “infantile" degli scarabocchi.

BOZZA



Lapide di Bernoulli con spirale archimedea, con motto
CAMBIATA RISORGO LA STESSA
riferito però alla spirale logaritmica,
errore *post mortem*.

BOZZA - DRAFT

9 Piano cartesiano – I parte

9.1 Introduzione

Guidance for Industry
Q8(R2) Pharmaceutical Development
a pagina 22:

BOZZA - DRAFT

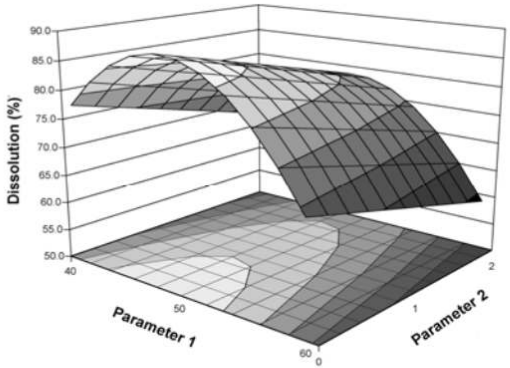


Figure 1a: Response surface plot of dissolution as a function of two parameters of a granulation operation. Dissolution above 80% is desired.

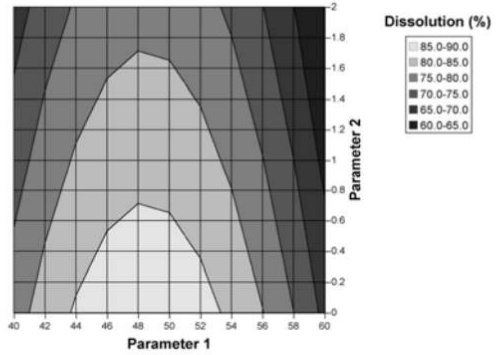


Figure 1b: Contour plot of dissolution from example 1a.

Nella soprastante fotografia di figura di Food and Drug Administration (USA) a sinistra (un disegno di porzione del)lo spazio cartesiano, altrimenti detto spazio cartesiano a 3 dimensioni, e a destra il piano cartesiano, altrimenti detto spazio cartesiano a 2 dimensioni. Lo spazio cartesiano a 1 dimensione è la retta orientata con origine e punto unità, identificabili con 0 e 1, e tutti i suoi punti sono

identificati con tutti i numeri reali.

Nel piano cartesiano che è l'oggetto di questa Lezione
i punti sono identificabili con le coppie ordinate di numeri reali.

Dei milioni di articoli scientifici nel campo biomedico, innumerevoli contengono rappresentazioni nel piano cartesiano. Si inizi apprezzando il ciclo pressione-volume del ventricolo murino sinistro.

BOZZA - DRAFT

9.2 Definiamo l'obesità di animaletti

Supponiamo che uno sperimentatore abbia 16 animaletti della stessa specie, e di ciascuno
1) misura la lunghezza
2) misura il peso
3) valuta se secondo lui è normopeso, sovrappeso o sottopeso.
Ottiene questi dati, senza qua riportare le unità di misura:

animaletto 1: lunghezza 2, peso 1, normopeso
animaletto 2: lunghezza 2.8, peso 0.9, sottopeso
animaletto 3: lunghezza 2.7, peso 1.9, normopeso
...
animaletto 16: lunghezza 2, peso 2, sovrappeso.

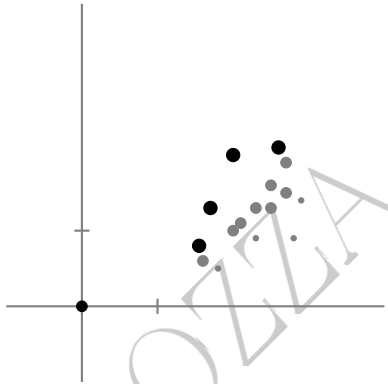
Ricerca interessante, anche costosa (il tempo è denaro), ma risultato oscuro e inconcludente.

BOZZA - DRAFT

L'università di Trieste (2023) alleva:
cavie, maiali, pulcini, pesci zebra;
altri animali da esperimento

vengono comprati da aziende esterne.

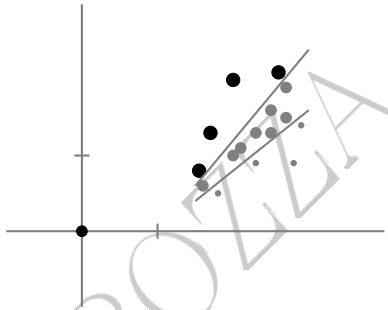
Rappresentiamo le coppie ordinate (lunghezza, peso) di ciascun animaletto come punti del piano cartesiano – adesso considerato in senso intuitivo, e dopo lo definiremo meglio – con colori diversi a seconda della qualifica normopeso, sovrappeso e sottopeso.



BOZZA - DRAFT

Adesso la situazione è molto più chiara: ci sono sostanzialmente 3 regioni del piano in cui cadono i punti corrispondenti rispettivamente ai normopeso, sovrappeso e sottopeso.

A un livello superiore, il ricercatore stabilisce analiticamente dei possibili confini delle 3 regioni, dando di fatto le condizioni che poi – senza fare alcun disegno bensì un semplice calcolo con la calcolatrice – permettono in qualunque Ambulatorio Veterinario – o Laboratorio 🐶 – di stabilire, dalla lunghezza e dal peso, se un dato animaletto va considerato normopeso o sovrappeso o sottopeso. Una cosa del genere si fa di fatto per gli esseri umani, in vari modi.



BOZZA - DRAFT

Standard proposto dal ricercatore:

- sottopeso se: $peso < (altezza - 1) \cdot 0.8$
- sovrappeso se: $peso > (altezza - 1) \cdot 1.2$

- altrimenti: normopeso.

Almeno, per $1.5 <$ **altezza** < 3**.**

Le formule delle Scienze Applicate hanno in generale un dominio di validità, spesso non esplicitato, con vaghi confini al di fuori dei quali perdono validità.

Non si possono applicare le formule del sovrappeso a un embrione.

Si noti che nell'esempio soprastante siamo entrati nella Scienza Moderna uscendo dalla medicina preistorica:

Mi sembra che uno con la forma di mio cugino (fa il gesto con le mani) si deve considerare troppo magro.

Adesso abbiamo formule matematiche. Con esse in certi casi si decidono terapie, e si hanno protocolli, *evidence based medicine*, eccetera.

BOZZA - DRAFT

9.3 Premessa definizionale

Faremo queste distinzioni – ma senza appassionarci troppo:

polinomio: $a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, p.es. $x^2 - 9$, ha ***radici*** ± 3;

equazione: $f(x) = g(x)$, p.es. $|x| = 3$ ha ***soluzione*** ± 3;
equazione polinomiale: $f(x) = g(x)$, p.es. $x^2 - 9 = 0$ ha ***soluzione*** ± 3;

funzione: $f(x)$, p.es. $f(x) := |x| - 3$, spesso scritta $y = |x| - 3$;
funzione polinomiale: p.es. $f(x) := x^2 - 9$, spesso scritta $y = x^2 - 9$;

disequazione in 1 variabile: $f(x) > g(x)$ (o $< \text{o} \geq \text{o} \leq$), p.es. $|x| > 3$, ha ***soluzione*** $x < -3 \vee x > 3$.

BOZZA - DRAFT

Per i matematici sono cose ben distinte ma nelle Scienze Applicate di solito non vanno molto per il sottile su queste questioni.

Aggiungiamo che le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ associata a una funzione f si chiamano zeri di f; con il che le radici di un polinomio sono gli zeri della funzione polinomiale associata.

Se abbiamo una funzione $f(x)$, possiamo denotarla (ed è il modo preferito dai matematici) anche solo con f, oppure con $f(\cdot)$, oppure (ma a rischio di confusione) con f(qualunque lettera).

9.4 I 2 assi cartesiani del piano cartesiano

Gli assi cartesiani sono una retta orientata detta asse delle ascisse e una retta orientata perpendicolare alla precedente, detta asse delle ordinate, che si intersecano in un punto detto origine e denotato con O. Su ciascuna è fissato un punto unità.

BOZZA - DRAFT

L'orientazione del piano e degli angoli con vertice nell'origine è antioraria. L'asse delle ascisse si sovrappone all'asse delle ordinate con una rotazione di +90°.
Spesso l'asse delle ascisse ha nome x, ma t se rappresenta un tempo, e quello delle ordinate y, ma p se rappresenta un peso, eccetera, qualsiasi nome.
Possiamo dire che su ciascun asse il punto unità fissa un'unità di misura, che determina l'ascissa e l'ordinata (distanze con segno dall'origine) dei loro punti. Tuttavia, si ricordi che in Matematica i numeri delle ascisse e ordinate sono numeri puri, ossia numeri, mentre nelle Scienze Applicate possono essere dotati di unità di misura, ed essere grandezze fisiche.

BOZZA DRAFT

È ben comprensibile che nello spazio cartesiano – di cui ci occuperemo ben poco – c'è un terzo asse, di solito indicato con z. Si possono immaginare i 3 spigoli di una normale stanza, concorrenti in 1 punto, dove magari sta un cestino della spazzatura, là in un angolo della stanza: 2 spigoli a terra, coi loro

battiscopa magari, corrispondono agli assi x e y, lo spigolo verticale all'asse z.

9.5 Punti del piano cartesiano

Equazione del[13] punto: il numero x_0 è l'ascissa di P e y_0 l'ordinata:

$$P = (x_0, y_0) \quad ovvero \quad P(x_0, y_0) \quad ovvero \quad (x_0, y_0)$$

Da adesso[14] le relazioni geometriche fra figure diventano relazioni algebriche fra numeri, con enorme vantaggio pratico e applicativo. In particolare, per i computer è normale operare su numeri.

BOZZA - DRAFT

[13] Altri Autori scrivono col punto e virgola: $(x_0; y_0)$

[14] Già il D'Oresme (XIV secolo), iniziatore del metodo, arrivò fino a produrre – sostanzialmente – l'equazione della retta. Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce Nicola d'Oresme: "matematico, fisico, astronomo ed economista, vescovo, filosofo, psicologo e musicologo francese (...) teologo appassionato, traduttore competente, influente consigliere di re Carlo V di Francia (...) ebbe l'idea di utilizzare ciò che dovremmo chiamare coordinate rettangolari nella terminologia moderna, una lunghezza proporzionale alla longitudo, l'ascissa di un dato punto e una perpendicolare a quel punto, proporzionale alla latitudo, l'ordinata (...) longitudo e latitudo possono variare o rimanere costanti."
Oggi noi seguiamo la teoria, più completa, di Descartes (Cartesius, Cartesio, XVII secolo).

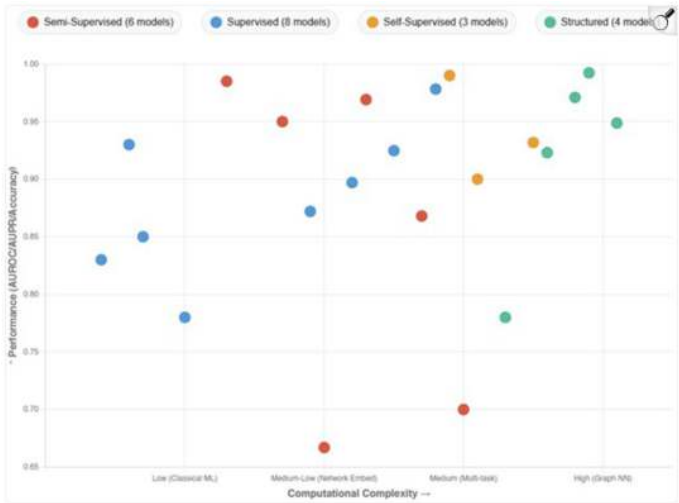
9.6 Grafico di dispersione ovvero scatterplot

Premesso che si scrive sia scatterplot che scatter plot, leggiamo:

> "Il grafico di dispersione o grafico a dispersione o scatter plot o scatter graph è un tipo di grafico in cui due variabili di un set di dati sono riportate su uno spazio cartesiano.
>
> I dati sono visualizzati tramite una collezione di punti ciascuno con una posizione sull'asse orizzontale determinato da una variabile e sull'asse verticale determinato dall'altra.
> (...)
> solitamente la variabile più importante è sull'asse delle y"
> (Wikipedia, l'enciclopedia libera)

BOZZA - DRAFT

Ecco un esempio[15] di scatterplot, da articolo[16] scientifico (2025) *open access* su intelligenza artificiale per farmaci. Non indaghiamo i significati, ma si vede bene che i pallini arancio e quelli verdi stanno più a destra in alto di quelli azzurri, il che avrà il suo significato.



[15] A rigore, per un matematico sono 4 scatterplot, corrispondenti ai 4 colori, in uno stesso diagramma, ma nelle Scienze Applicate diranno che è 1 scatterplot (a colori).

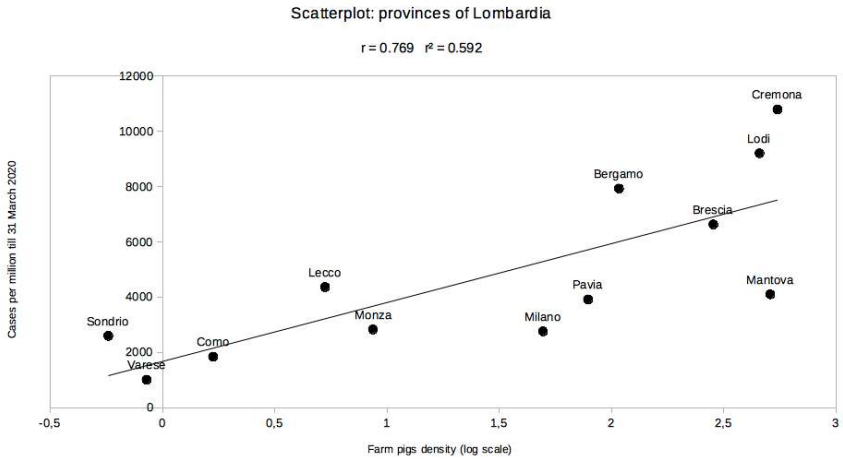
[16] Gheorghita FI, Bocanet VI, Iantovics LB. Machine learning-based drug-drug interaction prediction: a critical review of models, limitations, and data challenges. Front Pharmacol. 2025 Jul 30;16:1632775. doi: 10.3389/fphar.2025.1632775. PMID: 40808680; PMCID: PMC12344460.

DRAFT

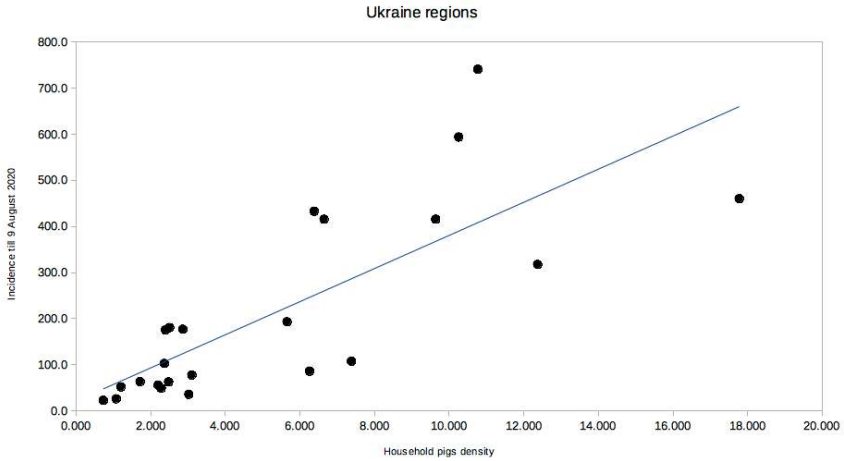
Ecco 2 esempi[17] di scatterplot, che mettono in relazione il covid-19 (che è una zoonosi) nella prima ondata (2020) rispettivamente con la densità dei maiali d'allevamento nelle province della Lombardia, e dei maiali d'allevamento domestico nelle regioni dell'Ucraina.
In entrambi gli scatterplot è stata aggiunta la retta di regressione, che è una retta – calcolata con particolari formule – che cerca di allinearsi con la generalità dei punti dello scatterplot.

[17] Tratti da: "In the first wave of the 2020 pandemic in several areas more sunlight less pandemic, more pigs more pandemic, and lower correlations with some other livestocks". (December 2020), A. Soranzo. DOI: 10.13140/RG.2.2.29852.3136

BOZZA - DRAFT


Scatterplot: provinces of Lombardia
r = 0.769 r² = 0.592
Cases per million till 31 March 2020
Farm pigs density (log scale)
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
-0,5
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
Cremona
Lodi
Bergamo
Brescia
Lecco
Pavia
Mantova
Monza
Milano
Sondrio
Como
Varese

BOZZA - DRAFT


Ukraine regions
Incidence till 9 August 2020
800.0
700.0
600.0
500.0
400.0
300.0
200.0
100.0
0.0
0.000
2.000
4.000
6.000
8.000
10.000
12.000
14.000
16.000
18.000
20.000
Household pigs density

BOZZA - DRAFT

Altri esempi in questo LINK->

Lo Studente, magari anche in dipendenza dei suoi interessi, troverà diagrammi interessantissimi cercando online per immagini con qualche motore di ricerca le parole

scatterplot qualche_nome_di_malattia_meglio_se_in_inglese

per esempio

scatterplot diabetes

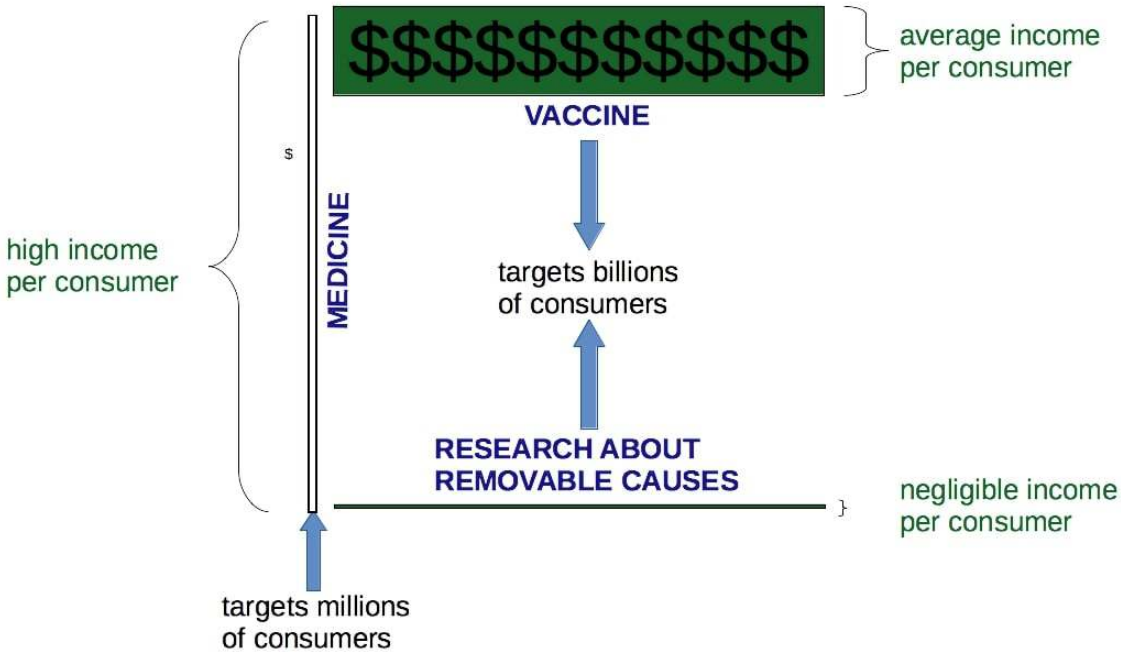
Problematicità degli scatterplot: punti sovrapposti.
Ovviamente lo scatterplot non funziona bene se 2 o più punti si sovrappongono esattamente, e in quel caso il diagramma ottenuto è **fuorviante**.

BOZZA - DRAFT

9.7 I diagrammi, o grafici nelle Scienze Applicate

Ogni rappresentazione grafica di dati la diremo *diagramma*.
Nelle Scienze Applicate spesso i diagrammi vengono chiamati grafici. (Ma per i matematici il grafico è altro: si veda il paragrafo 9.10).

BOZZA - DRAFT



Esempio di diagramma. Con simili strumenti un'azienda farmaceutica puó decidere in quali ricerche scientifiche investire per ottimizzare i guadagni. Poi, in base alla dottrina economica corrente, *la mano invisibile del mercato* dovrebbe produrre benefici per molti.

Detto ultrasemplificatamente, con numeri riferibili all'Italia per agevole compransione: il farmaco lo date magari a 50mila malati gravi, il vaccino a 50 milioni di sani: sono mille volte di più clienti. I più famosi farmaci (Remdesivir, Paxlovid, Molnupiravir) creati specificamente per il covid (inizialmente propagandati come semi-miracolosi e poi risultati molto meno efficaci) avevano costi dell'ordine dei 500-3000 euro, 1 dose di vaccino sui 4-20 euro: è vero che i farmaci costavano 100 volte più del vaccino, ma i destinatari del vaccino erano 1000 volte di più. Proporzionalmente c'è stato l'interesse delle case farmaceutiche per vaccini e farmaci. Sulla ricerca delle cause rimovibili c'è stato pochissima ricerca scientifica. Il diagramma fa capire chiaramente queste questioni.

BOZZA - DRAFT

Fra i diagrammi ci sono anche i diagrammi a torte e gli istogrammi.

9.8 Rette del piano cartesiano

Un'infinità di fenomeni delle Scienze Applicate viene modellizzata, più o meno esattamente ovvero più o meno approssimativamente, con equazioni

$$y = numero \cdot variabile + evantuale\, altro\, numero$$

i cui grafici nel piano cartesiano sono rette

Si cerchi per esempio sul web diabetes regression line

Esistono

- rette verticali, cioè parallele all'asse y: equazione $x = p$
- rette orizzontali, cioè parallele all'asse x: equazione $y = q$
- rette oblique, non parallele nè all'asse x nè all'asse y

Equazione esplicita della retta passante per l'origine e non verticale,

BOZZA - DRAFT

ovvero

retta obliqua od orizzontale, per l'origine:

$$y = m\,x$$

e questa funzione è caratterizzata da

"al raddoppiare di x raddoppia y e viceversa."

La maggior parte delle funzioni di 1 variabile delle Scienze Applicate ha questa forma.
Per esempio la Prima Legge di Gay-Lussac ovvero Legge di Charles con la temperatura assoluta

$V = V_0\,\alpha\,T$ $\quad$ T *temperatura assoluta* $\quad$ *retta per l'origine nel piano* (T, V)

Equazioni esplicita della retta non verticale, ovvero

retta obliqua od orizzontale:

$$y = m\,x + q$$

BOZZA - DRAFT

per esempio $giorni_dal_concepimento = 365.25\, anni + 273$ (Formula approssimativa).

q ci dice il punto di intersezione con l'asse y, precisamente $(0, q)$.
m: ***coefficiente angolare***, ci indica la pendenza della retta;
se è 0 la retta è orizzontale
se è > 0 la retta "sale"
se è < 0 la retta "scende".

A volte nelle Scienze Applicate l'equazione appare come

$$y = m\,(x + p)$$

che è esattamente come prima con $q = m\,p$ ovvero $p = q/m$.

Per esempio una ricerca scientifica[18] dà questo peso ideale

$$\text{weight_children_aged_1-5_years} = 2 \times (\text{age_in_years} + 5)$$

[18] Make your Best Guess: an updated method for paediatric weight estimation in emergencies, by Tinning K, Acworth J., in Emerg Med Australas. 2007 Dec;19(6):528-34.

BOZZA - DRAFT

che nella forma $y = m\,x + q$ sarebbe weight_children_aged_1-5_years = 2 × age_in_years + 10.
Addirittura può presentarsi scritta in una forma equivalente

$$y = a\,(b\,x + c)$$

per esempio la Prima Legge di Gay-Lussac ovvero Legge di Charles con i gradi Celsius

$$V = V_0\,(1 + \alpha\,t) \qquad t\ temperatura\ ^\circ C \qquad retta\ obliqua\ nel\ piano\ (t, V)$$

Equazione implicita della retta: $a\,x + b\,y + c = 0$ con $(a, b) \neq (0, 0)$

per esempio $2\,x - y + 10 = 0$ che è quella appena vista salvo diverse variabili.

Ogni punto $P(x, y)$ le cui coordinate verificano l'equazione della retta appartengono alla retta, e questo sarà un fatto generale, estendibile a tutte le *curve*, in rappresentazione esplicita o implicita. Per esempio $(1.7, 63.869)$ sta sulla curva del peso ideale maschile secondo Keys, che è la parabola (grafico di) $y = 22.1\,x^2$: altezza in metri 1.70 (ovvero 1.7, matematicamente), peso 63.869 in chilogrammi.

BOZZA - DRAFT

Equazione della retta per 2 punti:

$$\boxed{\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}} \quad (3)$$

Naturalmente con semplici passaggi algebrici la forma soprastante può essere ricondotta ad $a\,x+b\,y+c = 0$, e, se la retta non è verticale, a $y = m\,x + q$.

BOZZA - DRAFT

9.9 Alcune rette particolari

Fra le rette che sono grafici di funzioni di x si distinguono queste:

$y = x$ bisettrice del I e III quadrante – funzione *identità*

$y = -x$ bisettrice del II e IV quadrante – passaggio all'opposto

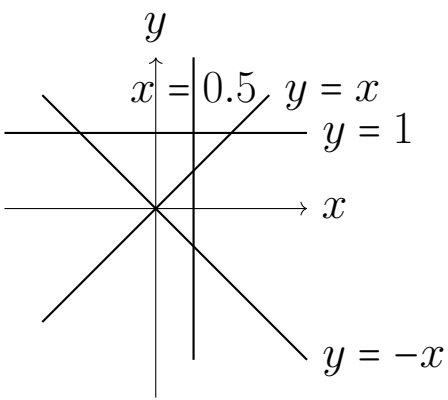
$y = q$ con $q \in \mathbb{R}$ generica retta orizzontale, e se $q = 0$ si ha

$y = 0$ asse x

e quelle che non sono grafici di funzioni di x sono precisamente queste:

$x = x_0$ generica retta verticale, e se $x_0 = 0$ si ha

$x = 0$ asse y.

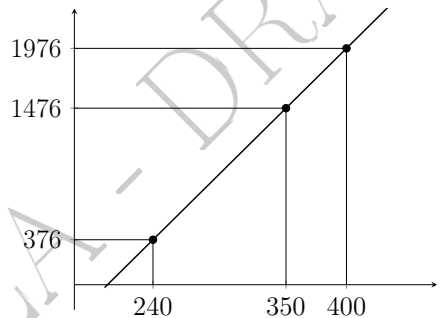


BOZZA - DRAFT

ESERCIZIO$_{\mu 2024}$ $*$ Supponiamo che un fenomeno cresca linearmente (e ci sono un'infinità di applicazioni vicine alla Farmacia) fra il tempo $t_1 = 240$ e il tempo $t_2 = 400$ dai valori 376 a 1976. Trovare l'equazione (di una retta) $y = m\,t + q$ modello del fenomeno (nell'intervallo temporale considerato) e con essa stimare il valore al tempo 350.

SVOLGIMENTO

Si può risolvere l'esercizio in modo abbastanza meccanico applicando la formula della retta per 2 punti, e poi semplici riduzioni algebriche; tuttavia per maggiore chiarezza facciamo anche un disegno.



Ai valori $t_1 = 240$ e $t_2 = 400$ corrispondono i valori $y_1 = 376$ e $y_2 = 1976$ rispettivamente, ovvero nel piano cartesiano abbiamo i 2 punti $(240, 376)$ e $(400, 1976)$. Con l'equazione della retta per 2 punti, qua espressa per variabili t e y, piuttosto che con le più usuali x e y,

$$\frac{t - t_2}{t_1 - t_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}$$

BOZZA - DRAFT

mettendo i valori numerici abbiamo

$$\frac{t-400}{240-400} = \frac{y-1976}{376-1976}$$

che è l'equazione della retta, e che ora con semplici manipolazioni algebriche porteremo alla richiesta forma $y = m\,t + q$:

$$\frac{t-400}{-160} = \frac{y-1976}{-1600} \qquad \Big/ \cdot (-1600)$$

$$10\,(t-400) = y - 1976 \qquad \Big/ + 1976$$

$$1976 + 10\,t - 4000 = y$$

e allora

$$y = 10\,t - 2024$$

---

in cui poniamo $t = 350$ ottenendo

$$y = 10 \cdot 350 - 2024 =$$

$$\boxed{1476}$$

BOZZA - DRAFT

9.10 Grafico (cartesiano) di una funzione

Grafico cartesiano G_f di una funzione $f(x)$ è (il disegno del)l'insieme

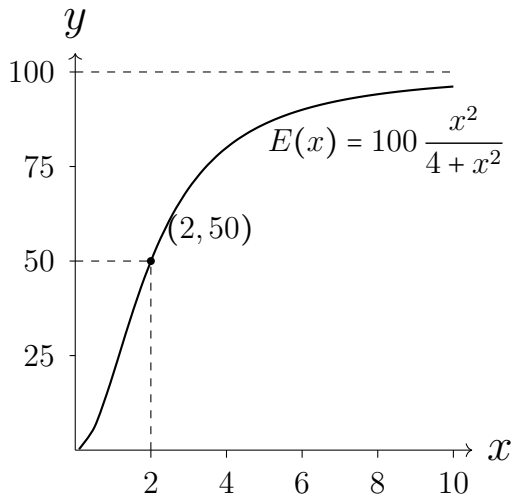
$$G_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\}$$

e spesso le funzioni hanno nome $f(x)$ o $g(x)$ o $y(x)$ denotato anche semplicemente y, e già abbiamo visto le rette orizzontali e oblique $y = m\,x + q$, che di fatto sono proprio[19] grafici.

Esempio. Ecco il grafico di una funzione di Hill $E(x)$, molto usata in farmacologia per descrivere la relazione dose-risposta.

[19] Le rette verticali non sono grafici di funzioni di x. (Ma sono grafici di funzioni di y).

BOZZA - DRAFT



La funzione di Hill $E(x)$ descrive in modo intuitivo come l'effetto di un farmaco aumenti all'aumentare della sua concentrazione x, crescendo rapidamente all'inizio e poi avvicinandosi a un massimo oltre il quale quasi non aumenta più; in questo contesto, la coppia $(2, 50)$ significa che l'effetto previsto è 50, cioè il 50% dell'effetto massimo, quando – in questo esempio – la concentrazione vale 2.

Altre nozioni sui grafici sono nei Complementi di questa Lezione.

9.11 Funzioni e dis/equazioni di primo grado

Per ogni m la funzione $f(x) := m\,x$ si chiama *funzione lineare*, e in questo contesto la scriveremo $y = m\,x$.

> Esempio: l'indice di massa corporea: $BMI := \frac{peso}{altezza^2}$, in cui l'altezza possiamo ragionevolmente considerarla costante – per un fissato individuo – mentre un peso x può variare più facilmente, in pratica abbiamo $y = \frac{1}{altezza^2} \cdot x$; si usino chilogrammi e metri).

BOZZA - DRAFT

È una funzione crescente se $m > 0$, e *decrescente* se $m < 0$, *costantemente nulla* se $m = 0$.
Il grafico è una retta passante per l'origine.
Fissato $m \neq 0$, l'equazione $m\,x = 0$ ha soluzione $x = 0$ (basta dividere per $m \neq 0$), mentre la disequazione in 1 variabile

$$m\,x > 0$$

si risolve dividendo per m ciò che, se e solo se $m < 0$, inverte l'ordinamento. Analogamente si risolve se si aveva $\geq$, $<$ o $\leq$.

Per ogni $m, q \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := m\,x + q$ si chiama funzione *affine*, deprecabilmente detta lineare, e in questo contesto la scriveremo $y = m\,x + q$.
È una funzione crescente se $m > 0$, e *decrescente* se $m < 0$, *costante* se $m = 0$.
Il grafico è una retta, che *intercetta* (interseca) l'asse y in $(0, q)$.

BOZZA - DRAFT

Fissati $m \neq 0$ e q, l'equazione

$$m\,x + q = 0$$

ha soluzione $x = -\frac{q}{m}$. (Si sommi $-q$ e si divida per $m \neq 0$).
Le 4 disequazioni con $>$, $\geq$, $<$, $\leq$ si risolvono sommando $-q$ e poi dividendo per m invertendo l'ordinamento se $m < 0$.
Fissati m e q, la disequazione in 2 variabili

$$y \geq m\,x + q$$

rappresenta il *semipiano chiuso* "sopra" la retta $y = m\,x + q$, compresi i punti della retta. Col $>$, il *semipiano aperto*, esclusi i punti della retta.
Con $\leq$, e con $<$, si va "sotto" la retta, compresa (semipiano chiuso) o rispettivamente esclusa (semipiano aperto).
Ciò vale anche per la $y > m\,x$ e le 3 analoghe, che hanno $q = 0$.

BOZZA - DRAFT

Nelle elaborazioni digitali, un computer non "vede" come noi se un puntolino bianco in una radiografia stia da una parte o dall'altra di una linea: traduce invece il problema in un calcolo numerico, che si conclude con la valutazione vero/falso.



BOZZA

9.12 Esempio di rette: peso normale secondo Broca

La più nota e popolare formula per il peso ideale

peso uomini: altezza meno 100

(taluni modificano 100 in 104 per le sole donne) dà una retta del piano cartesiano dei punti $(altezza, peso)$.
E ammessa nel peso una tolleranza del 10%, si ottiene una regione del piano cartesiano, costituita da punti $(altezza, peso)$, delimitata da 2 rette.
(E 2 segmenti, a voler essere pignoli, e il segmento di destra non è ben definito: fino a quale altezza massima la formula è da ritenersi valida? Non vorremo mica definire il peso ideale di una persona ipoteticamente alta 3 metri, quindi caso unico gravemente malata?)

> Con l'altezza h (in centimetri) e il peso p (in chilogrammi) la Formula di Broca definiva (oggi esistono vari altri standard)
>
> peso[20] normale$=(h-100)\pm 10\%$ (secondo alcuni $h \geq 130$)
>
> e qua – a conti fatti – riconosciamo 2 rette e 3 regioni del

[20] Ovvero, con la corretta interpretazione del ±10%, in senso intervallare,
peso normale $\in$
$[(h-100)-(h-100)10\%, (h-100)+(h-100)10\%]$

BOZZA - DRAFT

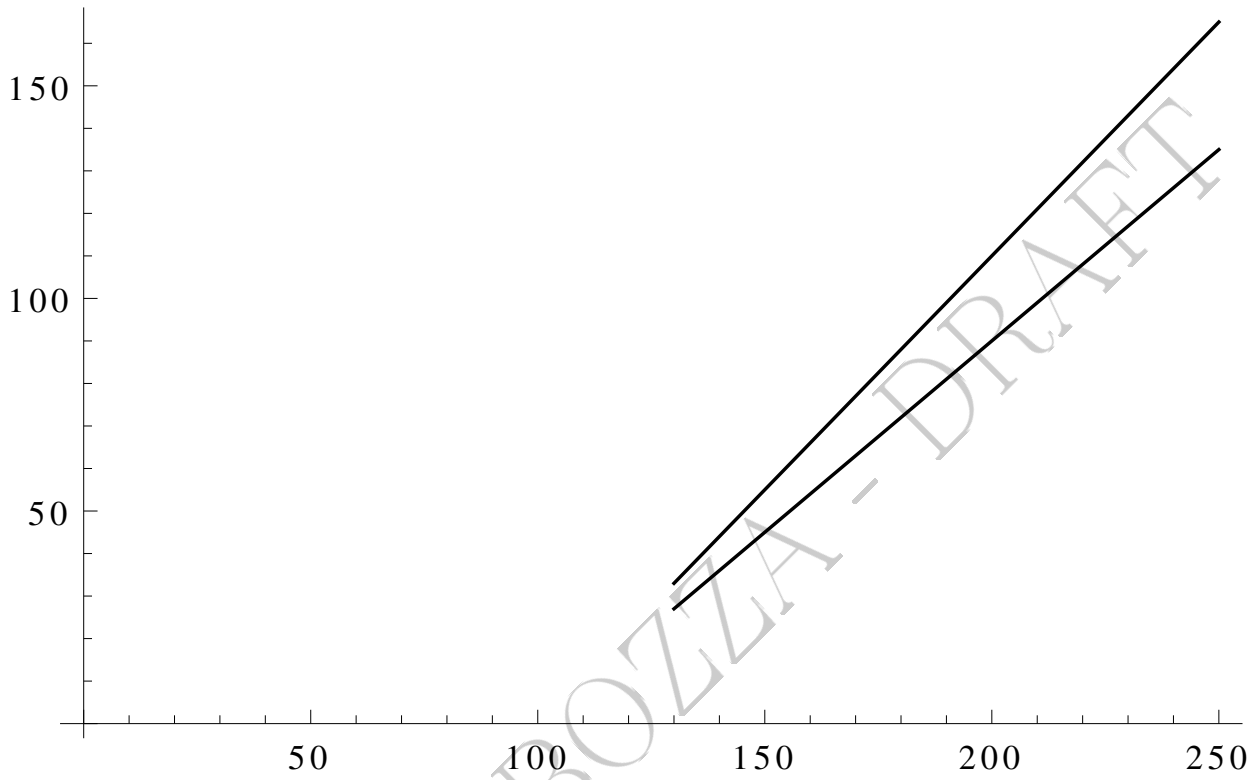
piano Ohp:

sottopeso $p < 0.9\,h - 90$ (sotto la retta)

sovrappeso $p > 1.1\,h - 110$ (sopra la retta)

e la terza regione, dei normopeso, è quella fra le 2 rette.
(Secondo certi Autori, ±20% invece che ±10%).

BOZZA - DRAFT



BOZZA - DRAFT

Figura 3: Le 2 rette estreme per i normopeso secondo la Formula di Broca con la tolleranza del 10%, limitatamente ad altezze fra 130 e 250 cm.

9.13 Nota finale sulle rette oblique

Le rette oblique con pendenza verso l'alto sono grafici di funzioni che "crescono sempre ugualmente".

Per esempio il volume V di liquido in una provetta al crescere del livello h oltre la parte "semisferica": $V = m\,h + q$, dove q è il volume della parte "semisferica" della provetta.

BOZZA - DRAFT

9.14 Nota cautelativa sui modelli matematici

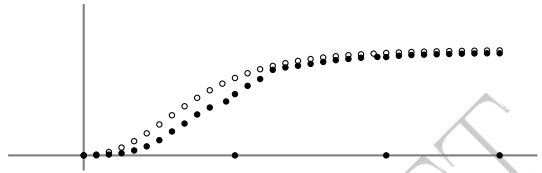
La formula di Broca per il peso ideale certamente smette di avere senso in qualche punto imprecisato – non esiste alcun peso ideale per persone alte un chilometro e anzi è dubitabile già per 3 metri. **Molte formule delle Scienze Applicate hanno un qualche dominio di ragionevolezza in cui modellizzano bene la realtà sensibile, divenendo sempre meno sensate verso imprecisati estremi.**
E non applicheremo certo la Formula di Mosteller per calcolare l'area della superficie corporea di un embrione di forma pressoché sferica – incomincerà a valere con buona approssimazione da un certo punto in poi, non ben definito, gradualmente.

BOZZA - DRAFT

9.15 I modelli per fare l'interpolazione, spesso bene

La semplice funzione (modello)

$$v(t) = \frac{14}{1 + t^{-2}\,\mathrm{e}^{-t}} \qquad 0 < t \le 2.75$$



approssima per i 2.75 anni dal 1 dicembre 2020 (tempo 0) all'inizio del settembre 2023 (tempo 2.75, due anni e 9 mesi ovvero tre quarti d'anno) il numero totale di dosi di vaccino somministrate, a livello mondiale, in miliardi.
(Vedasi https://ourworldindata.org/covid-vaccinations con opzione `cumulative`).
Per esempio per $t = 2$ (cioè a 2 anni dall'inizio) si trova 13.5 (cioè 13 miliardi e mezzo; il valore vero era 13 miliardi al 1 dicembre 2022).
Con la formula data si può ottenere un valore per esempio per il, poniamo, 15 settembre 2022, che se non esatto sarà comunque verosimilmente vicino al vero: non avranno mica sospeso a livello mondiale le vaccinazioni dal 1 al 15 settembre per poi fare nella seconda metà di settembre quelle di tutto il mese, no?

BOZZA - DRAFT

L'interpolazione riesce *spesso* bene.

BOZZA - DRAFT

9.16 I modelli per fare l'estrapolazione, spesso male

Se un valore evolve nel tempo secondo una legge empirica (sperimentale) ci viene naturale azzardare una previsione per il futuro. Questo processo è molto meno garantito dell'interpolazione.
Se abbiamo di giorno in giorno, per un fenomeno, i valori

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

è ovvio che ci viene naturale – in assenza di altre informazioni – azzardare il valore 0 per il giorno successivo. Spesso va male.

BOZZA - DRAFT


L'Islanda ha oltre il 73% di vaccinati. La variante Delta ha provocato un'ondata epidemica con un notevole aumento dei casi. Però non è morto nessuno, a riprova che i vaccini funzionano, e pure molto bene. Da @
Daily new confirmed COVID-19 deaths per million people
11:40 AM · 26 ago 2021 · Twitter for iPhone
Attualmente l'Islanda è la nazione in Europa tra le più vaccinate (78%) e con più decessi Covid rispetto alla popolazione.
Islanda
70
60
50
40
30
Jun 3, 2021
Jul 24, 2021
Sep 12, 2021
Nov 1, 2021
Dec 21, 2021
Mar 11, 2022

BOZZA DRAFT

Complementi

9.17 Complementi – Grafici in senso matematico

Grafico è un sottoinsieme G di $X \times Y$ tale che

$$(\forall x)\,(\exists!\, y)\,(x, y) \in G$$

(È sottinteso che $x \in X$ e $y \in Y$, e fra la quarta e la quinta parentesi è implicito un "tale che").

Ma nelle Scienze Applicate spesso qualunque diagramma viene chiamato grafico.

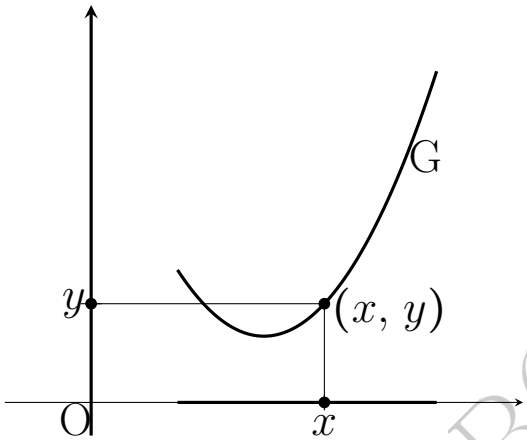
Cioè:

Per ogni x del dominio esiste ed è unico un y del codominio, tale

BOZZA - DRAFT

che la coppia ordinata (x, y) appartiene a G, grafico.

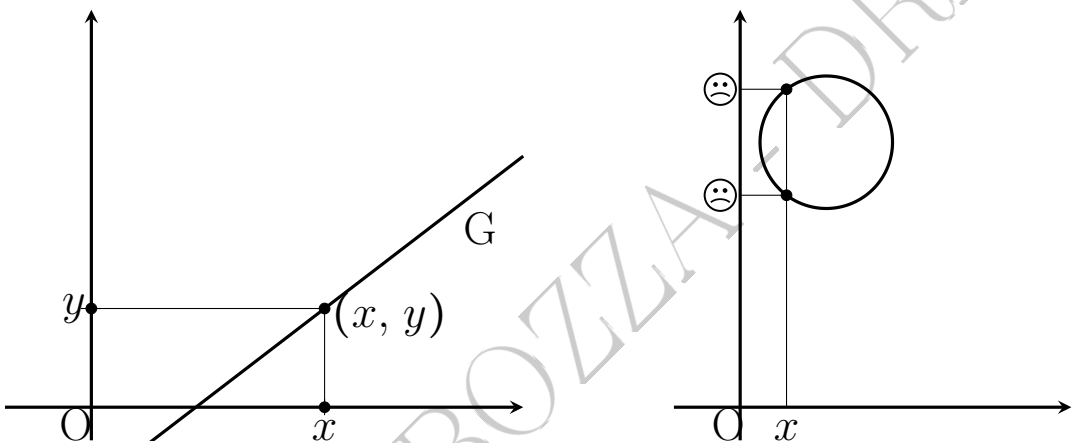
Se X e Y sono insiemi di numeri reali (cioè sottoinsiemi di $\mathbb{R}$) allora G è un grafico cartesiano (bidimensionale ovvero 2-dimensionale).



A ogni x del dominio X corrisponde un solo y del codominio y. Il fatto che a 2 valori x e x' corrisponda lo stesso y non è un problema: semplicemente, questo è il grafico di una funzione non iniettiva (le funzioni iniettive sono caratterizzate da "mai 2 in uno") ma è pur sempre un grafico.

BOZZA - DRAFT

Si noti che una retta è un grafico[21] in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ma un circolo[22] no, almeno non nel senso matematico sopra detto – perché per uno stesso valore x ci sono più di un valore y tali che (x, y) apparterrebbe al grafico, che quindi non è un grafico – ma nelle Scienze Applicate chiameranno anche quello *grafico*.



BOZZA - DRAFT

😇 I matematici fanno la distinzione fra un *grafico*, oggetto astratto che spesso è un insieme

[21] Ovviamente una retta verticale è un grafico di una funzione della y, precisamente una funzione costante del tipo $x = cost$.

[22] Comunque per i matematici il circolo è un *grafico polare*.

illimitato del piano, e un *disegno di un grafico*, necessariamente limitato e quindi in generale incompleto ovvero parziale: nessuno può disegnare tutta una parabola, eppure sia nel linguaggio comune che nelle Scienze Applicate il disegno di una sua parte (quasi) tutti lo chiamano (grafico della) parabola.

BOZZA - DRAFT

Figure	su WolframAlpha `Link->`	su WolframAlpha `Link->`

Nella Scienze Applicate e nella divulgazione scientifica avviene spesso che anche i (disegni dei) grafici in senso matematico vengano arricchiti da notazioni e disegni, diventando diagrammi di vario tipo.

Si cerchi per esempio sul web dose response curve (oppure graph).

9.18 Complementi – Altre formule sulle rette

• Formula della distanza di 2 punti:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Il computer non mette un righello da un punto all'altro: usa questa e analoghe formule.
E se un modernissimo computer "vede" i punti con una telecamera, poi la distanza la calcolerà comunque con la formula soprastante, dopo aver trasformato i punti in coordinate numeriche.

• 2 rette di equazioni $y = m\,x + q$ e $y = m'\,x + q'$

$$\text{sono parallele} \iff m' = m$$

(e ovviamente 2 rette verticali $x = p$ e $x = p'$ sono parallele).

• 2 rette di equazioni $y = m\,x + q$ e $y = m'\,x + q'$

$$\text{sono perpendicolari} \iff m' = -\frac{1}{m}$$

BOZZA - DRAFT

- Formula della distanza punto-retta:

$$d = \frac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

BOZZA - DRAFT

ESERCIZI SULLA LEZIONE 9

BOZZA - DRAFT

9.19 Esercizio risolto a – Retta e sangue

$_{\mu 2018}$ $*$ Supponiamo che nel sangue di una persona una certa sostanza abbia alle 8:00 di mattina concentrazione 50 mg/dl e alle 6:00 di sera concentrazione 82 mg/dl. Esprimendo i tempi in ore, dallo 0 della mezzanotte, i valori dati individuano 2 punti nel piano cartesiano con i tempi t sull'asse delle ascisse e le concentrazioni y sull'asse delle ordinate (con o senza unità di misura).
Trovare la retta per i 2 punti espressa in forma esplicita, senza unità di misura. (Con essa si potrebbe ipotizzare la concentrazione in qualunque orario intermedio, supponendo una variazione lineare, che in assenza di altre indicazioni appare la più ragionevole approssimazione; ma qua non ne faremo nulla).

Svolgimento
Osservato che le 6:00 di sera sono le 18:00, cioè a 18 ore dal tempo 0, i valori dati individuano i 2 punti del piano cartesiano

$$(8\,h, 50\,mg/dl),\ \ (18\,h, 82\,mg/dl) \quad \text{ovvero meglio} \quad (8, 50),\ \ (18, 82)$$

e ricordando la formula della retta per 2 punti troviamo

$$\frac{t - t_2}{t_1 - t_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}$$

$$\frac{t - 18}{8 - 18} = \frac{y - 82}{50 - 82}$$

$$\frac{t - 18}{-10} = \frac{y - 82}{-32} \quad / \cdot (-1) \cdot 10 \cdot 32$$

$$32\,(t - 18) = 10\,(y - 82)$$

$$32\,t - 576 - 10\,y = -820$$

$$-10\,y = -32\,t - 244$$

$$\boxed{y = 3.2\,t + 24.4}$$

anche esprimibile con

$$\boxed{y = \tfrac{16}{5}\,t + \tfrac{122}{5}}$$

(Da cui p.es. a mezzogiorno, $t := 12$, la concentrazione ipotetica 62.8 mg/dl).

BOZZA - DRAFT

9.20 Esercizio risolto b – Retta e sangue

$_{\mu 2018}$ $*$ Supponiamo che nel sangue di una persona una certa sostanza abbia alle 6:00 di mattina concentrazione 70 nmoli/L e alle 9:00 di sera 150 nmoli/L. Esprimendo i tempi in ore, dallo 0 della mezzanotte, i valori dati individuano 2 punti nel piano cartesiano con i tempi t sull'asse delle ascisse e le concentrazioni y sull'asse delle ordinate (con o senza unità di misura, h e poi nmoli/L).
Con la retta per i 2 punti si può ipotizzare la concentrazione in qualunque orario intermedio, supponendo una variazione lineare, che in assenza di altre indicazioni appare la più ragionevole approssimazione. Con l'equazione esplicita di quella retta, senza unità di misura, calcolare l'ora in cui la concentrazione è salita a ≥ 110 (nmoli/L, unità di misura che non esprimiamo per semplicità).

SVOLGIMENTO
Osservato che le 9:00 di sera sono le 21:00, cioè a 21 ore dal tempo 0, i valori dati individuano i 2 punti del piano cartesiano

$$(6\,h, 70\,nmoli/L), \quad (21\,h, 150\,nmoli/L) \quad \text{ovvero meglio} \quad (6, 70), \quad (21, 150)$$

e ricordando la formula della retta per 2 punti troviamo

$$\frac{t - t_2}{t_1 - t_2} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}$$

BOZZA - DRAFT

$$\frac{t-21}{6-21} = \frac{y-150}{70-150}$$

$$\frac{t-21}{-15} = \frac{y-150}{-80} \quad / \cdot(-1)\cdot 15\cdot 80$$

$$80\,(t-21) = 15\,(y-150)$$

$$80\,t - 1680 - 15\,y = -2250$$

$$-15\,y = -80\,t - 570$$

e dividendo per -15

$$y = \frac{16}{3}\,t + 38$$

e ora risolviamo la disequazione della concentrazione $y \geq 110$

$$\frac{16}{3}\,t + 38 \geq 110$$

$$\frac{16}{3}\,t \geq 110 - 38$$

$$\frac{16}{3}\,t \geq 72$$

$$t \geq 72 \cdot \frac{3}{16} = 9 \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{2} = 13.5$$

cioè a 13.5 ore dalla mezzanotte, cioè 13 ore e mezza, cioè alle

BOZZA - DRAFT

13:30

BOZZA - DRAFT