10 Piano cartesiano – II parte

10.1 Richiami sulle rette del piano cartesiano

Consideriamo il piano cartesiano Oxy ma ovviamente invece di x e di y potranno esserci nomi diversi.

Ogni retta del piano cartesiano ha un'equazione che portando tutto a sinistra del segno dell'uguale ha una forma

$$\text{espressione in } x \text{ e/o } y \ = \ 0 \qquad x - y - 100 = 0$$

con varie limitazioni un po' ingarbugliate, che spieghiamo in 5 modi.

• Grezzissimamente: ok x e y ma non x^2, y^2, $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $x \cdot y$, numero/x, numero/y, x/y, y/x, non logaritmi né altre "cose strane".

BOZZA - DRAFT

- Molto praticamente ed efficacemente, con esempi tipici:

  $x = 8$ da intendersi $x - 8 = 0$, passaggio da fare anche nelle formule qua sotto

  $y = 2\,x - 1$ (volume di liquido in una certa provetta)

  $y = 0.8\,x$ (dello scontare il 20%)

  $y = 1$ (esempio: limite del 100% a cui tende una saturazione)

  $x - y +$ numero $= 0$ (equazione del bilancio di carica elettrica, usato in chimica nello studio degli equilibri acido-base e in medicina nei modelli dell'equilibrio acido-base, per esempio con Na^+, Cl^-, H^+ e OH^-)

- L'espressione uguagliata a 0 rientra in ogni caso nella forma generale

  costante $\cdot\, x +$ costante $\cdot\, y +$ costante

e le prime 2 costanti non possono essere contemporaneamente 0.

- In termini tecnici, l'espressione è un polinomio di I grado in x e y;

- L'espressione può essere fatta solo con x e y e precisamente deve esserci una delle 2 o entrambe, e con + e −, e anche $\cdot$ e / però questi ultimi 2 segni con varie limitazioni: "sotto"

BOZZA - DRAFT

il / possono esserci solo numeri e non x né y, e il $\cdot$ mai fa moltiplicare fra loro la x e la y.

BOZZA - DRAFT

Tipiche formule che rappresentano infinite rette

$x = p$	verticale	caso speciale e più raro
$y = m\,x + q$	non verticale	e orizzontale se $m = 0$
$y = m\,x$	non verticale per l'origine	e orizzontale se $m = 0$
$y = q$	orizzontale	
$a\,x + b\,y + c = 0$	assolutamente qualunque	purché a, b non entrambi nulli

$$\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} - \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} = 0 \qquad \text{retta per 2 punti } (x_1, y_1),\ (x_2, y_2)$$

10.2 Sistemi lineari di 2 equazioni in 2 incognite

Esempio farmaceutico: miscela di 2 soluzioni.
Immagina di avere due soluzioni con differenti concentrazioni a e b di un principio attivo, e vuoi ottenere una miscela con una concentrazione u desiderata. Devi determinare quali volumi x e y di ciascuna soluzione usare per ottenere un volume desiderato v che

BOZZA - DRAFT

abbia la concentrazione desiderata u. Con un procedimento logico non semplicissimo[1]

si ottiene questo sistema lineare $\begin{cases} x + y = v \\ a\,x + b\,y = u\,v \end{cases}$

Qua il Lettore vede tante lettere, ma in effetti solo x e y sono

[1]Per fissare le idee, per produrre il sistema consideriamo questo esempio:
Soluzione 1 ha una concentrazione di farmaco a = 10 mg/mL
Soluzione 2 ha una concentrazione di farmaco b = 2 mg/mL
Vuoi ottenere un volume totale
v = 100 mL con una concentrazione desiderata di
u = 5 mg/mL
Incognite:
x: Volume della soluzione 1 (in mL).
y: Volume della soluzione 2 (in mL).
Sistema di equazioni:
Equazione del volume totale:
x+y=100 (Il volume totale deve essere 100 mL).
Equazione della concentrazione:
10x+2y=5x100
(La quantità totale di farmaco deve essere 500 mg, ovvero
5mg/mL x 100mL).

BOZZA - DRAFT

incognite, mentre a, b, u, v sono 4 numeri[2] prima spiegati in nota.

Metodo risolutivo

Il sistema lineare (ovvero di primo grado) di 2 equazioni in 2 incognite x e y

Esempio

$$\begin{cases} a\,x + b\,y + c = 0 \\ a'\,x + b'\,y + c' = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 7\,x + 6\,y - 12 = 0 \\ 5\,x + 9\,y - 14 = 0 \end{cases}$$

se $(a, b) \neq (0, 0)$ e $(a', b') \neq (0, 0)$ rappresenta geometricamente l'intersezione di 2 rette nel piano cartesiano.
Quelle 2 rette potrebbero non avere intersezione, se esse sono parallele e distinte, o infinite soluzioni, se esse sono (parallele e) coincidenti. Questi 2 casi particolari sono caratterizzati dal *determinante*

[2] Più precisamente grandezze fisiche, con le unità di misura; comunque le unità di misura si possono omettere nei calcoli risolutivi, e aggiungere alla fine, ai risultati.

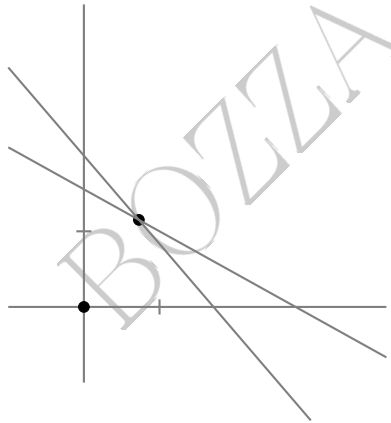
BOZZA - DRAFT

nullo

$$\det = a\,b' - b\,a' = 0$$

e si risolveranno con cautela analiticamente e contemporaneamente facendo un disegno. Non ce ne occuperemo.

Ipotizziamo ora $\det \neq 0$, che è il caso generale ed è l'unico che ci interessa. Allora abbiamo 2 rette incidenti in 1 punto, le cui coordinate x_0 e y_0 costituiscono la soluzione del sistema di equazioni.



BOZZA - DRAFT

Ognuna delle eventuali equazioni mancanti di 1 delle 2 variabili si risolve subito, e il valore di x o y trovato si sostituisce nell'altra equazione, se in essa c'è quella variabile, e così quell'equazione diventa un'equazione di primo grado in una sola variabile, e si risolve subito anch'essa.

Ipotizziamo ora che ci siano sia la x che la y in entrambe le equazioni: esplicitiamo y dalla prima e sostituiamola nella seconda, che diventa così un'equazione di primo grado nella sola x. Trovata la x, si trova la y dalla sua espressione precedentemente esplicitata dalla prima equazione.

ESERCIZIO$_{\mu}$ $*$ Risolvere dando della soluzione la scrittura decimale:

$$\begin{cases} -1 + 4\,x + 3\,y = 0 \\ 4\,x - y = 13 \end{cases}$$

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare lo stan-

BOZZA - DRAFT

dard del punto decimale, a scelta).

Dalla seconda, sommando ad ambo i membri $y - 13$, ricaviamo y

$$4\,x - 13 = y \qquad (*)$$

e lo mettiamo nella prima equazione del sistema lineare

$$-1 + 4\,x + 3\,(4\,x - 13) = 0$$

$$-1 + 4\,x + 12\,x - 39 = 0$$

$$-40 + 16\,x = 0$$

$$16\,x = 40$$

$$x = \frac{40}{16}$$

(ed è inutile semplificare la frazione) che è il cercato esatto valore di x, che adesso esprimiamo in forma decimale come richiesto, calcolando $40 : 16$ con la calcolatrice o a mano:

$$x = 2{,}5$$

e la y la calcoliamo con la $(*)$

$$y = 4\,x - 13 = 4\,\frac{40}{16} - 13 = \frac{40}{4} - 13 = 10 - 13 = -3$$

BOZZA - DRAFT

$$\boxed{x = 2{,}5\,; \quad y = -3}$$

OPPURE

Facciamo la differenza delle 2 equazioni (la prima meno la seconda) ottenendo

$$-1 + 3\,y + y = -13$$

$$4\,y = 1 - 13$$

$$4\,y = -12$$

$$y = -3$$

che messa nella seconda equazione in pochi passaggi dà x.

BOZZA - DRAFT

10.3 Sistemi lineari di n equazioni in n incognite

Il metodo visto si estende[3] ai sistemi lineari di 3 equazioni in 3 incognite[4] x, y e z, e poi anche più numerose equazioni e in ugual numero incognite, ma può essere malagevole e comunque non ce ne occuperemo, e per quel tipo di calcoli è decisamente consigliabile usare[5] i software.

BOZZA - DRAFT

[3] Si esplicita z dalla prima equazione e si sostituisce nella seconda e la terza, che insieme costituiscono a questo punto un sistema lineare di 2 equazioni in 2 incognite x e y. Tuttavia, i sottocasi particolari, di 0 e infinite soluzioni, iniziano a diventare molteplici, e non sempre facilissimi da trattare, e dipendono da vari determinanti.
Analogo e via via sempre più complesso il caso dei sistemi lineari di n equazioni in n incognite.

[4] Geometricamente rappresenta l'intersezione di 3 piani nello *spazio cartesiano* $\mathbb{R}^3$.

[5] Per sistemi con poche incognite si può usare WolframAlpha, scrivendo ad esempio

```
solve x+2y-z=1, 3x-y=4, y+z=0
```

Per risoluzioni esatte (con frazioni) anche di sistemi più grandi, fino a qualche centinaio di incognite, si può usare Mathematica; per risoluzioni approssimate (numeriche) di sistemi molto grandi, anche con decine di migliaia di equazioni, si usano librerie come LAPACK.

ESERCIZIO$_{\mu 2023}$ $*$ Un cerotto e una pillola costano insieme €1,10 e la pillola costa 1 euro in più del cerotto. Quanto costa il cerotto?

SVOLGIMENTO

Viene usato – già nel quesito – lo standard della virgola decimale. (Che è fissato per legge in Italia per gli euro).

Ci sono vari modi di risolvere, e qua risolviamo in questo modo, con ovvio significato dei simboli:

$$cerotto + pillola = 1{,}10$$
$$pillola = cerotto + 1$$

e sostituendo la seconda equazione nella prima, si ha successivamente:

$$cerotto + (cerotto + 1) = 1{,}10$$

$$cerotto + cerotto + 1 = 1{,}10$$

$$2 \cdot cerotto + 1 = 1{,}10 \qquad \Big/ -1$$

BOZZA - DRAFT

$2 \cdot cerotto = 0{,}10 \qquad / : 2$

$cerotto = 0{,}05$

cioè

5 centesimi

ovvero

€ 0,05

Nota. Formulato con una palla e una mazza invece che con un cerotto e una pillola, questo è un problema classico, che si trova in *Pensieri lenti e veloci*, di Daniel Kahneman, vincitore del premio Nobel per l'Economia nel 2002 per il suo lavoro sui pregiudizi cognitivi. (A intuito molti rispondono erroneamente 10 centesimi).

BOZZA - DRAFT

10.4 Sistemi di equazioni e disequazioni

Definizioni.

Un sistema di n equazioni in 1 incognita x, con la parentesi graffa (grande) che vale *et*, è il predicato (con opportune funzioni)

$$\begin{cases} f_1(x) = g_1(x) \\ \dots \\ f_n(x) = g_n(x) \end{cases}$$

e sostituendo gli = con segni di disuguaglianza si ha un sistema di n disequazioni in 1 incognita.

Naturalmente possono considerarsi sistemi con 2 o più incognite (per esempio il sistema lineare di 2 equazioni in 2 incognite) e anche sia con equazioni che disequazioni. E altri casi[6] ancora.

[6] I predicati del tipo $f(x) \neq g(x)$, che potremmo chiamare *"inequazioni"*, non li nomineremo per nome considerandoli implicitamente compresi nelle disequazioni data l'equivalenza con $(f(x) - g(x))^2 > 0$.

Definizione.
Predicati come (**??**) e (**??**), che sono come quelli qua sopra considerati ma in più ammettono anche il *vel*, si potrebbero chiamare *sistemi generalizzati di equazioni ed eventualmente disequazioni*.

BOZZA - DRAFT

Non esiste un metodo generale per risolverli tutti.

Molti sistemi si risolvono applicando le formule finora trattate in questo testo e/o altre che tratteremo (ma può essere più o meno facile o difficile) ma altri sistemi no.

Ce ne occuperemo ben poco.

BOZZA - DRAFT

Complementi

BOZZA - DRAFT

10.5 Complementi – Esempio parzialmente risolto

Abbiamo una provetta contenente 2 liquidi non miscibili di volumi 7 ml e 6 ml con pesi specifici incogniti e peso complessivo 12 g (si pesa la provetta e sottrae il peso del vetro) e un'altra provetta contenente gli stessi liquidi di volumi 5 ml e 9 ml rispettivamente e peso complessivo 14 g.

Per trovare i pesi specifici incogniti x e y risolviamo il sistema lineare (di 2 equazioni in 2 incognite)

(x g/ml) 7 ml+ (y g/ml) 6 ml=12 g

(x g/ml) 5 ml+ (y g/ml) 9 ml=14 g

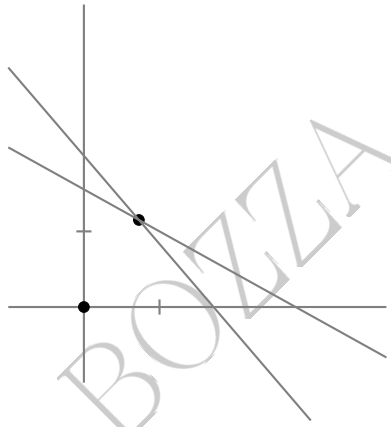
ovvero

$$\begin{cases} 7\,x + 6\,y - 12 = 0 \\ 5\,x + 9\,y - 14 = 0 \end{cases}$$

che ha

$$\det = 7 \cdot 9 - 6 \cdot 5 = 63 - 30 \neq 0$$

e si troveranno i pesi specifici (qua dati senza l'unità di misura g/ml) $x = \frac{8}{11} \approx 0.727$ e $y = \frac{38}{33} \approx 1.151$.



BOZZA - DRAFT

10.6 ESERCIZI SULLA LEZIONE 10

10.6.1 Esercizio risolto – Equivalenza Celsius-Fahrenheit

Si risolva

$$\begin{cases} F = C & \text{(stesso valore numerico)} \\ F = 1.8\,C + 32 & \text{(formula di conversione)} \end{cases}$$

(che determina il valore numerico – numero *puro*, senza unità di misura – della temperatura che ha lo stesso valore numerico nelle scale Celsius e Fahrenheit).

Esplicitiamo F dalla prima, che in effetti "è già risolta", e sostituiamo nella seconda ottenendo

$$C = 1.8\,C + 32 \qquad \Big/ + (-1.8\,C)$$

$$-0.8\,C = 32 \qquad \Big/ : 0.8$$

$$C = 32 : (-0.8)$$

$$\boxed{C = -40}$$

(40 gradi sotto 0, sia Celsius che Fahrenheit).

BOZZA - DRAFT

11 Piano cartesiano – III parte

11.1 Iperbole equilatera riferita agli asintoti

Il grafico della funzione *passaggio al reciproco*, già vista,

$$y = \frac{1}{x}$$

è una ***curva***[7] e più in generale

$$y = \frac{cost}{x} \qquad cost \neq 0$$

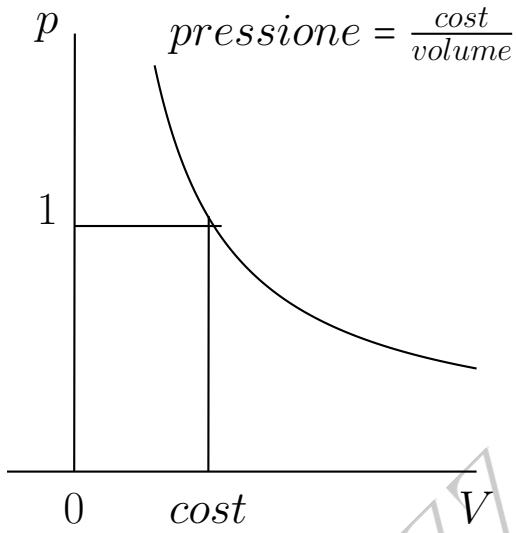
ha grafico una curva detta ***iperbole equilatera (riferita agli asintoti)*** e questa è una delle formule di più ampia ricorrenza nelle Scienze Applicate.

Esempio della Termodinamica, Scienza utile nella fabbricazione dei farmaci.

BOZZA - DRAFT

[7] Una definizione rigorosa di *curva* è alquanto complessa, e in questa trattazione elementare supporremo noto il concetto. Le curve più semplici sono le rette.

Legge delle Isoterme di Boyle-Mariotte



Queste funzioni $y(x) = \frac{cost}{x}$ sono caratterizzate da

"al raddoppiare di x dimezza y e viceversa"

BOZZA - DRAFT

11.2 Equazioni implicite delle curve

Una funzione $f(x)$ ha un grafico, in senso matematico, che è l'insieme dei punti $(x, f(x))$ al variare di x nel dominio della funzione. Tutte le funzioni della Farmacia sono molto regolari, e il loro grafico non è mai qualche frattale o strana nuvola di punti – che pure hanno interesse in Matematica. Questi grafici molto regolari sono *curve*.

Esistono però altre curve, pure molto regolari, come il circolo di centro l'origine e raggio 1, che non sono grafici in senso matematico di alcuna funzione, perché per esempio a $x = 0$ corrispondono 2 punti sulla curva, uno con $y = 1$ e l'altro con $y = -1$.

Questa curva è invece *definita implicitamente* dall'equazione

$$x^2 + y^2 = 1,$$

sua[8] *definizione implicita*.

BOZZA - DRAFT

[8] In altre parole:
Tutti i grafici (in senso matematico) sono *curve*,
e hanno un'equazione *esplicita* $y = f(x)$,
ma esistono curve che non sono grafici (in senso matematico)

11.3 Circolo e cerchio

Ecco l'equazione implicita del ***circolo*** di raggio r e centro (x_0, y_0):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Altri Autori lo chiamano *cerchio* ma in questo testo il ***cerchio*** sarà la regione "dentro" un circolo (compreso il bordo cioè il circolo).
Questa *disequazione*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$$

se verificata rappresenta lo *stare dentro il circolo* ovvero *appartenere* al corrispondente *cerchio*.
Ricordiamo

la lunghezza del circolo $2\pi r$

l'area del cerchio πr^2.

e hanno un'equazione *implicita* $f(x, y) = 0$.

BOZZA - DRAFT

11.4 Diagrammi bolle

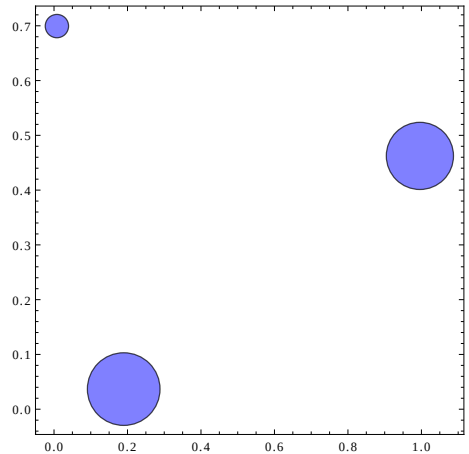
L'area del cerchio può essere usata per rappresentare un valore numerico mediante i ***diagrammi a bolle***. 3 sono[9] i casi principali:

A. I diagrammi a bolle sono ottimi specialmente per rappresentare con n cerchi n terne di numeri (x_i, y_i, z_i) usando le (x_i, y_i) come in uno scatterplot, e poi usando i punti dello scatterplot come centri di cerchi di area z_i.

Per esempio nella Figura 1 in https://www.frontiersin.org/journals/clinical-diabetes-and-healthcare/articles/10.3389/fcdhc.2025.1495849/full (articolo sul diabete) ci sono 3 diagrammi a bolle (di questo tipo delle terne di numeri) sovrapposti, distinguibili per colore.

BOZZA - DRAFT

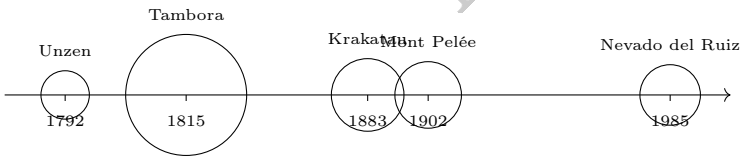
[9] In via teorica ma rarissimamente applicata, con una rappresentazione "prospettica" (a rigore *assonometrica*) si possono anche rappresentare quaterne di numeri.



Ecco alcune fra le infinite terne che si potranno considerare:

- (altezza, peso, glicemia)
- (colest. HDL, colest. LDL, BMI)
- (ore di studio, % frequenza, voto)

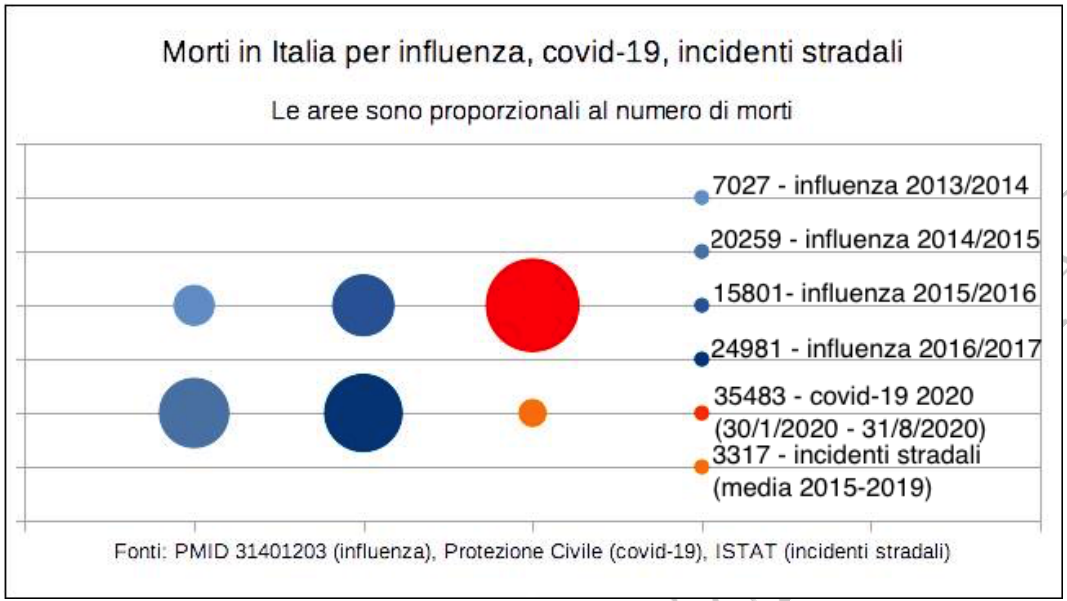
B. I diagrammi a bolle possono essere usati anche per rappresentare n coppie di numeri, ma è un caso raro.
Come in questo esempio: sull'asse delle ascisse gli anni dal 1792, e in corrispondenza di 5 di quegli anni 5 cerchi con le aree a rappresentare le vittime di eruzioni vulcaniche, trascurando gli incidenti con poche vittime: (1792,15000), (1815,92000), (1883,36000), (1902,30000), (1985,25000).



BOZZA - DRAFT

C. I diagrammi a bolle sono molto usati anche per rappresentare n numeri singoli (costituendo un'alternativa ai bar chart). Qua per esempio 1 lista di 6 numeri viene rappresentata con 6 cerchi, variamente colorati per identificarli. Il cerchio rosso, il più grande, rappresenta i morti di covid-19 in Italia nella prima ondata del 2020.

BOZZA - DRAFT



BOZZA DRAFT

(Si rassicuri l'automunito lettore: nonostante la ciclopica perdita di anni di vita umana causata dai veicoli, con incidenti causati magari da 1 che uccide 2 o 3, anche bambini o giovani con aspettativa di vita residua di 50 anni, nulla di simile alle limitazioni generate dal covid sta per avvenire contro i veicoli, che muovono un mercato mondiale smisurato, con un

numero di veicoli a 4 ruote dell'ordine di 10^9 che consumano carburante dell'ordine di 10^{12} litri all'anno).

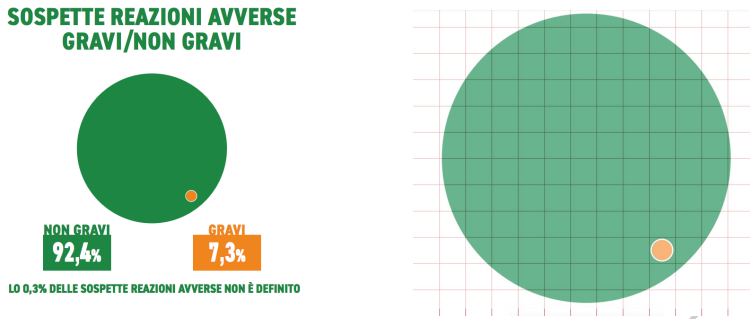
11.5 Grave ambiguità dei diagrammi a bolle

Purtroppo secondo altri Autori non l'area dei cerchi bensì il diametro rappresenta il terzo valore di ogni terna di valori, per cui i diagrammi a bolle di fatto possono essere molto fuorvianti guardandoli, e facendoli bisogna specificare lo standard usato.
Ancor peggio coi diagrammi a bolle disegnati "tridimensionalmente".

Esempio problematico con numeri singoli. Con il covid-19 c'è stato un fiorire di fake news sui vaccini, spesso di antivaccinisti, e questo si sa. Ma vediamo in questo esempio la mostruosa sproporzione fra l'area del cerchio arancio e quello verde: mentre si afferma che l'arancio rappresenta il 7,3% la sua area è meno dell'1%.
Guardando bene, è possibile che abbiano usato lo standard di rappresentare il dato con il diametro invece che con l'area, ma allora avrebbero dovuto accostare i cerchi e non sovrapporli perchè sovrapponendoli qualunque persona

BOZZA - DRAFT

ragionevole riterrà che il dato sia rappresentato dall'area.
È ovvio che falsi di questo genere generano diffidenza verso i vaccini.

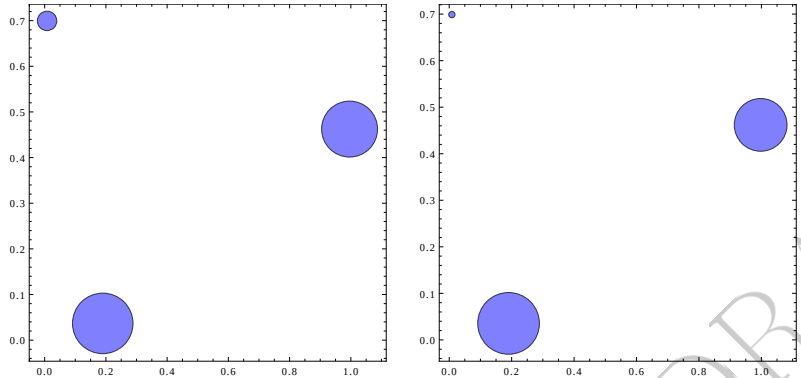


Fonte: AIFA, p. 5 in: Link Con quadrettatura sovrapposta

Edit. Una serie di inchieste ha poi rivelato che era una cosa deliberata: nelle indicazioni che furono mandate ai grafici, l'AIFA scrive che l'area del cerchio delle manifestazioni gravi non sia proporzionale, "potrebbe essere più piccolo".

Esempio problematico con terne di numeri

BOZZA DRAFT



Esempio di 2 rappresentazioni delle stesse 3 terne di numeri coi diagrammi a bolle, a sinistra con le aree (ottimo) e a destra coi diametri (pessimo).

BOZZA - DRAFT

Problematicità ulteriore: bolle sovrapposte Ovviamente il diagramma a bolle non funziona bene se 2 o più bolle si sovrappongono esattamente (o quasi esattamente se le bolle vengono rappresentate piene), e in quel caso il diagramma ottenuto è **fuorviante**.

* * *

Troverà facilmente il Lettore un'infinità di diagrammi a bolle negli articoli scientifici e divulgativi, anche di argomento farmaceutico.

BOZZA - DRAFT

11.6 La parabola

La parabola è una curva del piano euclideo (e poi cartesiano) con la forma più o meno della lettera

U

ovvero del simbolo $\subset$, ma si estende indefinitamente, allungandosi molto più che allargandosi (comunque si allarga indefinitamente).

Nel piano cartesiano viene di solito orientata con asse di simmetria verticale, più o meno così $\cup$ verso l'alto, o così $\cap$ verso il basso.

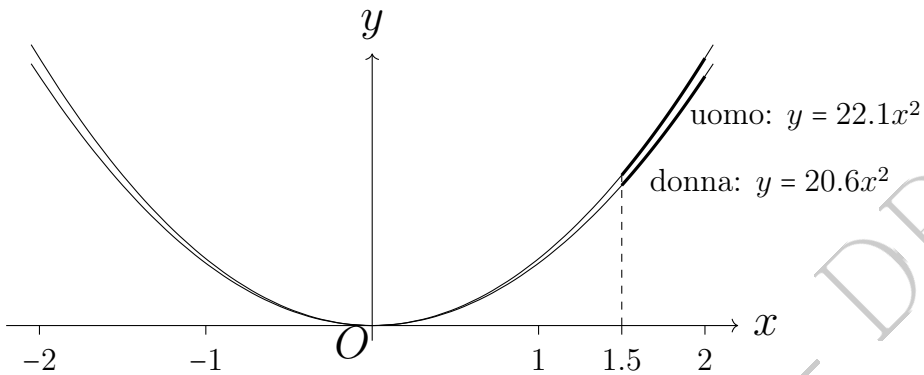
Nelle varie applicazioni scientifiche, può interessarne una parte piut- tosto che un'altra (raramente tutta: è un'astrazione matematica, come la retta).

Nota. Nel piano euclideo tutte le parabole sono *simili*, cioè sovrapponibili salvo ingrandimento, come i circoli ma è molto meno evidente.

BOZZA - DRAFT

Esempio, duplice: formule del peso ideale secondo Keys

Ecco 2 parabole classiche della Medicina e della Farmacia:



Si hanno – oggi si usano formule migliori – le Formule di Keys per il peso ideale y dell'uomo e della donna, data l'altezza x:

$$\text{peso ideale uomo adulto: } y = 22.1\,x^2 \qquad 1.5 \le x \le 2$$

$$\text{peso ideale donna adulta: } y = 20.6\,x^2 \qquad 1.5 \le x \le 2$$

Si usino metri e chilogrammi; dominio di ragionevolezza da 1.5 a 2.

BOZZA - DRAFT

11.7 Equazione della parabola con asse verticale

La generica **parabola** con asse verticale ha equazione

$$y = a\,x^2 + b\,x + c \qquad a \neq 0$$

La disequazione

$$y \geq a\,x^2 + b\,x + c$$

rappresenta lo stare *sopra* la parabola (in *senso debole*, per avere il *senso forte* si ponga >, e questo è un fatto generale delle curve).

E ovviamente

$$x = a\,y^2 + b\,y + c \qquad a \neq 0$$

rappresenta la generica parabola con asse orizzontale.

La parabola è simmetrica rispetto ad una retta detta *asse* che interseca la parabola in un punto detto *vertice* della parabola.

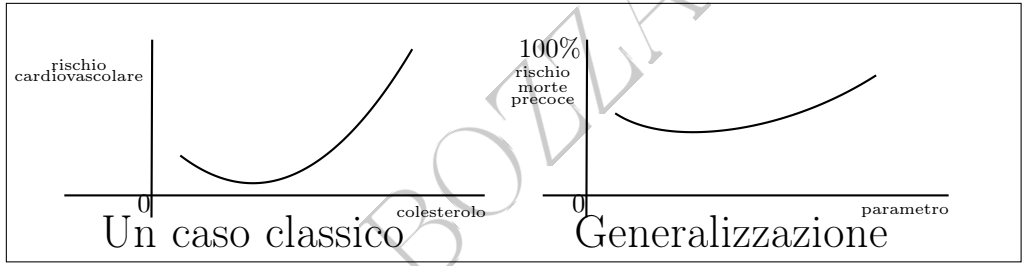
BOZZA - DRAFT

Esempio. in uno studio scientifico si è stabilito

$$weight \leq -3{,}767 + 89.11 * length + 1.237 * length^2 \qquad 40 \leq length \leq 55$$

(con la lunghezza in centimetri e il peso in grammi) rappresenta bene una soglia per il 90% dei neonati in un certo[10] ospedale. (Con 50 cm dà 3781 grammi). Si noti che usano il punto decimale, e la virgola come separatore delle migliaia, e lo capiamo dal numero in 89.11.

11.8 Le curve a forma di J



BOZZA - DRAFT

[10] Hospital Israelita Albert Einstein, San Paolo, Brasile, 1995-1998.

La parabola ci offre un semplice modello del concetto, più generale, di *curva a forma di J*. Traiamo da Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *J curve*:

> In medicine, the 'J curve' refers to a graph in which the x-axis measures either of two treatable symptoms (blood pressure or blood cholesterol level) while the y-axis measures the chance that a patient will develop cardiovascular disease (CVD). It is well known that high blood pressure or high cholesterol levels increase a patient's risk. What is less well known is that plots of large populations against CVD mortality often take the shape of a J curve which indicates that patients with very low blood pressure and/or low cholesterol levels are also at increased risk.

BOZZA - DRAFT

È nozione comune che il colesterolo troppo alto possa fare male, ma poco considerato è il caso del colesterolo troppo basso, e similmente

per la pressione.
Senza voler qua fare Medicina, citiamo comunque da un articolo[11] scientifico:

> Both low and high HDL-C were associated with increased mortality risk. We recommended 50–79 mg/dL as the optimal range of HDL-C among Chinese adults.

È ben possibile che tali curve a forma di J siano tanto diffuse nei fenomeni biomedici quanto poco considerate. Infatti come l'eccesso di qualcosa può fare male, e magari questo è notissimo, anche la carenza di quel qualcosa può fare male, e magari questo è meno noto o meno considerato.

BOZZA - DRAFT

[11] https://www.thelancet.com/journals/lanwpc/article/PIIS2666-6065(23)00192-X/fulltext

11.9 Area del segmento parabolico, ed epidemie

Mentre l'area del triangolo è notoriamente $\frac{1}{2}\,b\,h$, l'area del segmento parabolico – la cui definizione lasciamo all'intuitivo lettore – è

$$A = \frac{2}{3}\,b\,h$$

Questo ci permette di stimare a colpo d'occhio il numero totale di morti di un'ondata epidemica disponendo di un istogramma a barre (bar chart) dei morti giornalieri, se – come spesso succede – esso disegna più o meno un segmento parabolico:

$$\boxed{\text{morti di un'ondata epidemica} = \frac{2}{3}\,durata \times picco} \qquad (1)$$

Ovviamente la durata va intesa in giorni e sarà bene non prendere il valore di picco effettivo ma mediarlo coi valori dei giorni vicini, anche a occhio, o ancor meglio usare, se disponibile, il massimo della *media mobile a 7 giorni*.

BOZZA - DRAFT

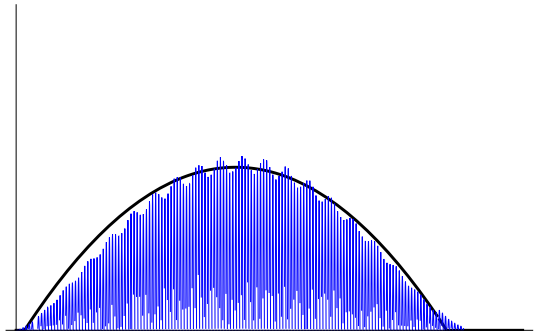


Figura 1: Modellizzazione del numero giornaliero di morti di un'epidemia con una parabola

Per esempio per un'ondata epidemica di 2 mesi con picco di 1000 morti al giorno si ottengono 40'000 morti, e questi 3 numeri sono grossolana approssimazione della prima ondata del covid in Italia nel 2020.

Nei Complementi si mostra migliore modellizzazione delle epidemie, con curve vagamente a campana asimmetriche, con *coda destra*, pure *pesante*.

BOZZA - DRAFT

11.10 Sull'utilità di fare i disegni delle curve

Come norma generale bisogna risolvere analiticamente – cioè coi calcoli – le equazioni e i sistemi di equazioni ed eventualmente disequazioni, per quanto possibile, perchè esistono casi in cui il disegno inganna, perfino se fatto col computer.

Tuttavia fare i disegni è comunque utilissimo:

(a) per verificare la correttezza dei risultati trovati;

(b) per una comprensione complessiva della situazione;

(c) per presentare divulgativamente i risultati, o per presentarli in modo chiaro in relazioni tecniche;

(d) per un tentativo seppure incerto di soluzione almeno approssimata quando il calcolo analitico è impossibile o proibitivamente difficile.

Sul punto (d) si veda un esempio nel paragrafo 11.15 nella Sezione di Complementi di questa Lezione.

BOZZA - DRAFT

Complementi

11.11 Complementi – Modellizzare epidemie: Gompertz

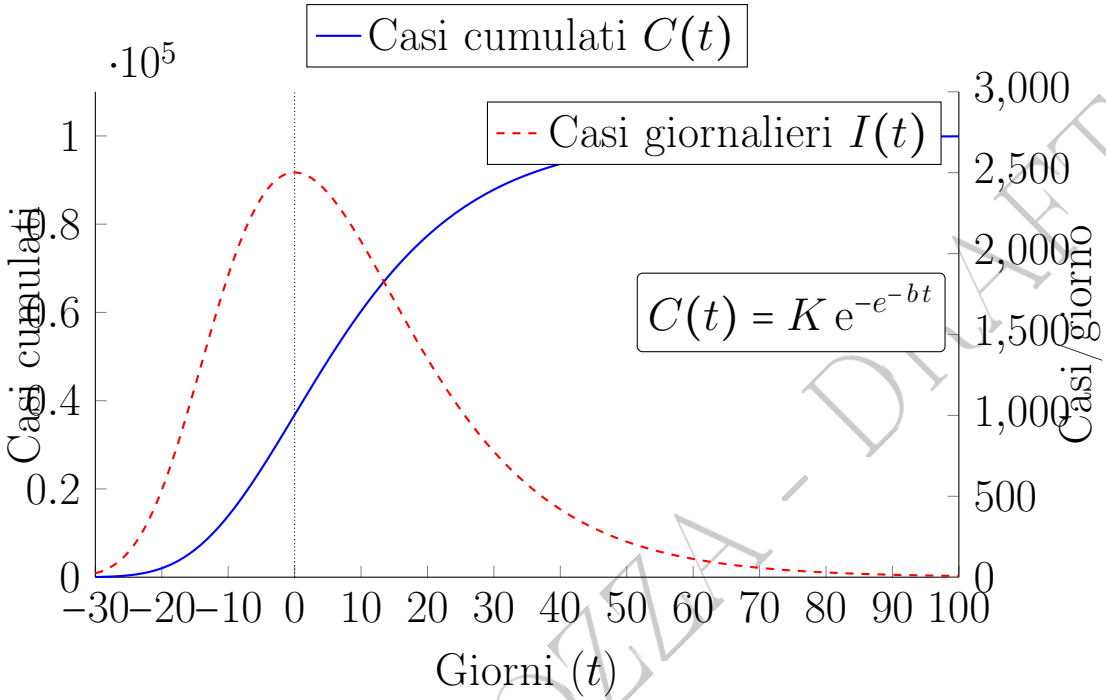
L'andamento reale tipico di un'ondata epidemica – cumulativo di morti o casi – viene bene modellizzato da funzioni di Gompertz

$$K\,\mathrm{e}^{-e^{-bt}}$$

con opportune costanti K e b.
Per esempio, nella figura sottostante

$K = 100\,000$
$b = 0.068$

BOZZA - DRAFT



BOZZA - DRAFT

Si noti che $I(t)$ è $C'(t)$, la derivata, concetto che verrà illustrato in seguito.

11.12 Complementi – Coniche date implicitamente

Altre *coniche* in equazione implicita sono queste, con $a, b > 0$:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{un'}\textit{iperbole}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad \text{un'altra } \textit{iperbole}$$

e le rette $y = \pm\frac{b}{a}x$ si chiamano *asintoti* dell'iperbole;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \textit{ellisse } (\text{in } \textit{forma canonica}^{(12)})$$

e la disequazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

se verificata rappresenta lo *stare dentro l'ellisse*. Se $a > b$ l'ellisse appare "ribassata" e se $b > a$ l'ellisse appare "allungata verso l'alto".

BOZZA - DRAFT

[12] *Canonico* significa, con parola internazionale di uso più moderno, *standard*.

Esercizio$_\mu$ Con $a := 3$ e $b := 4$ si scrivano, esplicitino (per archi) e disegnino le 2 iperboli e l'ellisse.

11.13 Complementi – Note finali sulle coniche

L'ellisse – in generale, anche se spostata in qualunque punto del piano, e allora con equazione diversa – è il *luogo*[13] dei punti del piano che ha costante la somma delle distanze da 2 punti detti *fuochi*.
Un'analoga proprietà, con la differenza, vale per le iperboli.
La parabola è luogo dei punti per i quali è sono uguali le distanze da un punto – detto *fuoco* – e da una retta – detta *direttrice*. nel *vertice*.
Parabole, ellissi e iperboli – disposte in qualunque modo nel piano – si chiamano **coniche**, e comprendono i circoli (che sono ellissi con $a = b$, se il centro è O).

[13] Insieme. Termine usato in geometria.

BOZZA - DRAFT

Sono intersezione del piano cartesiano con un *cono completo*.

BOZZA - DRAFT

11.14 Complementi – Altre curve nel piano cartesiano

Con le rette (non verticali) e le coniche, e i grafici di $\operatorname{sgn}(x)$ e $|x|$, abbiamo visto grafici che ricorrono un'infinità di volte nelle Scienze Applicate, e ce ne sono infiniti altri, per esempio (quello della funzione)

$$y = \sqrt[3]{x}$$

e, oltre alle rette verticali, infinite altre curve in rappresentazione implicita, per esempio il *folium di Cartesio*

$$x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y = 0 \qquad a > 0$$

la cui esplicitazione è proibitivamente difficile al livello di questo testo elementare; ma si verifichi la potenza e l'utilità di WolframAlpha scrivendovi

```
x^3+y^3-3xy=0
```

BOZZA - DRAFT

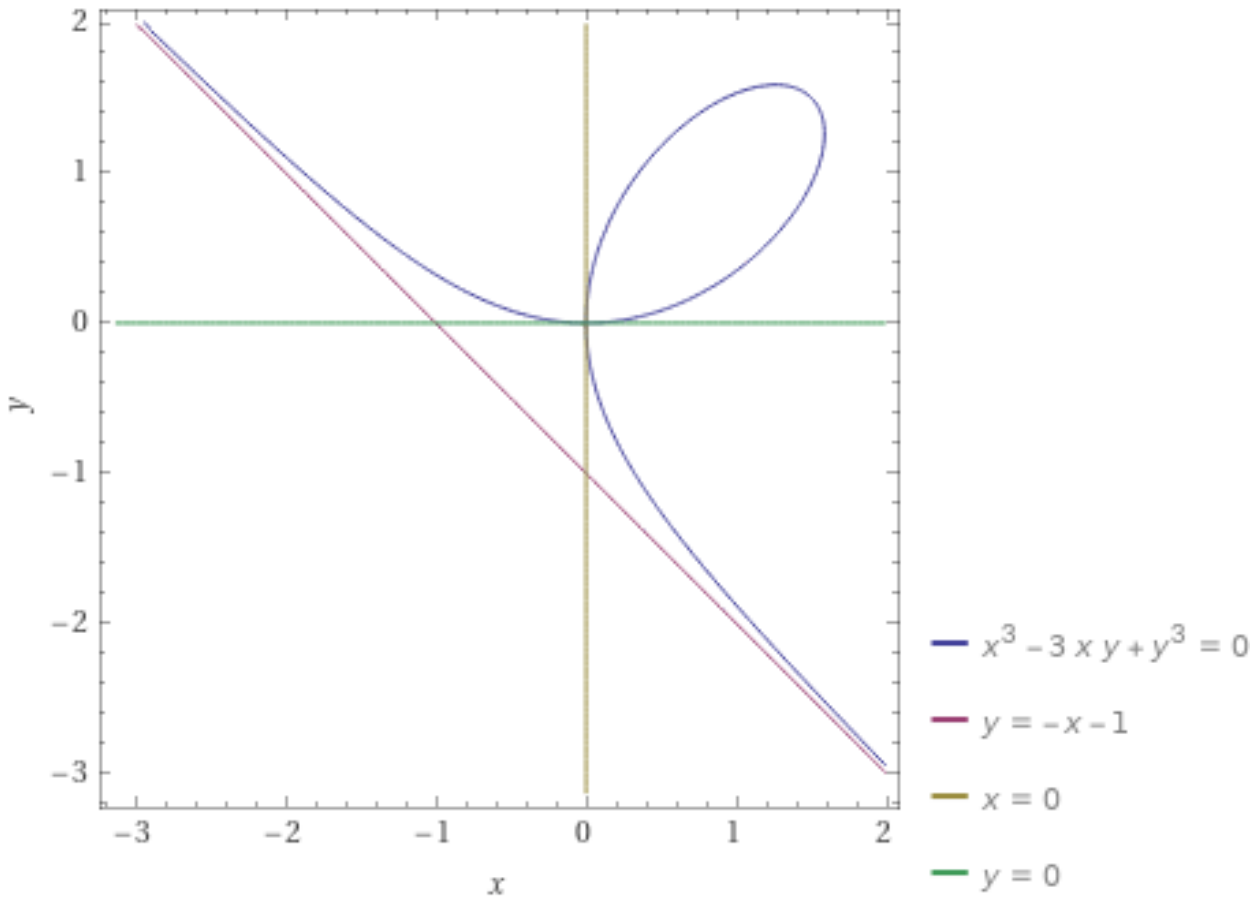


Figura 2: Folium di Cartesio e suo asintoto $y = -x - 1$

(avendo scelto $a := 1$ per fare un esempio concreto).

BOZZA - DRAFT

11.15 Complementi – Risolvere equazioni graficamente

Si consideri questo *sistema*[14] *di 2 equazioni in 2 incognite* molto difficile da risolvere analiticamente:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - 3\,x\,y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Dal disegno (sperabilmente, e, in effetti, in questo caso non ingannevole) vediamo che ci sono 4 soluzioni, e abbiamo anche loro approssimazioni, tanto migliori quanto più grande e preciso è il disegno.

[14] In effetti, addirittura di 6° grado.

BOZZA - DRAFT

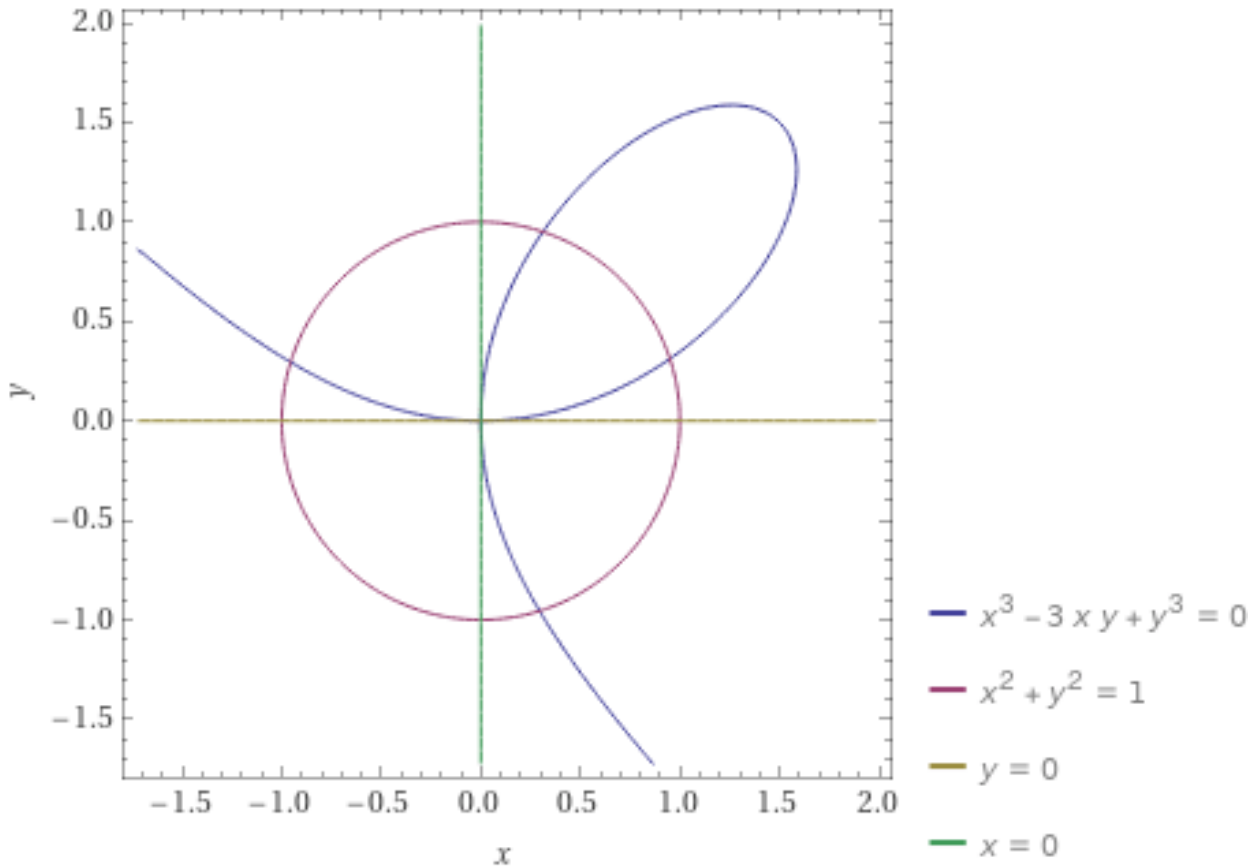


Figura 3: Intersezioni del folium di Cartesio col circolo unitario di centro l'origine

La soprastante figura è stata ottenuta con una potente intelligenza artificiale matematica attualmente (2026) online gratuitamente: WolframAlpha (qua utilizzata per ben piccola cosa) con cui il futuro professionista farà bene a familiarizzare. Si segua questo LINK. Si noti che WolframAlpha dice che non ci sono soluzioni, ma questo è dovuto al fatto che per fare un disegno chiaro sono state aggiunte alle 2 equazioni date le 2 equazioni degli assi cartesiani, e togliendo queste ultime dà le 4 soluzioni cercate, approssimate con parecchi decimali: LINK.

BOZZA - DRAFT

11.16 Complementi – Le famiglie di curve

Un esempio di ***famiglia*** (insieme) di curve in rappresentazione implicita ci viene dalla Termodinamica, con la Legge di van der Waals

$$\left(p + a\,\frac{n^2}{V^2}\right)(V - n\,b) = n\,R\,T$$

nel piano (V, p), con R, n, a, b costanti, al variare di T.

Si consideri come ulteriore esempio di *famiglia* (insieme) di curve in rappresentazione implicita il *folium di Cartesio*

$$x^3 + y^3 - 3\,a\,x\,y = 0 \qquad a > 0$$

la cui esplicitazione è proibitivamente difficile al livello di questo testo elementare; ma si verifichi la potenza e l'utilità di WolframAlpha scrivendovi

```
x^3+y^3-3x y=0
```

(avendo scelto $a := 1$ per fare un esempio concreto).

BOZZA - DRAFT