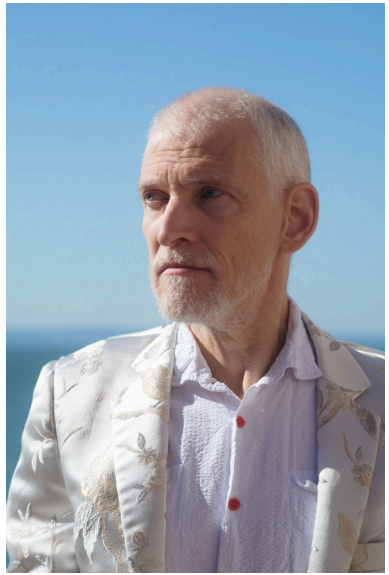
Le Compresse di Matematica per le Scienze della Farmacia

Lezioni 12-13

versione 21 ottobre 2026

BOZZA - DRAFT

Università degli Studi di Trieste



Alessandro Soranzo
Ricercatore universitario
Settore Scientifico Disciplinare:
MATH-03/A - Analisi matematica
Gruppo Scientifico Disciplinare:
01/MATH-03 - Analisi matematica, probabilità e statistica matematica

BOZZA - DRAFT

Indice

12 Piano cartesiano – IV parte **5**

12.1 Parabole e funzioni e dis/equazioni di secondo grado[10] 5

12.2 Equazione di secondo grado[17] 6

12.3 Valore assoluto, e relative dis/equazioni[24] 11

12.4 Errore assoluto, relativo e percentuale[31] 14

12.5 La sezione aurea[39] 17

12.6 Esempio chimico-farmaceutico[46] 18

12.7 Complementi – 3 metodi per disegnare una parabola . 21

12.8 Complementi – Fattorizzazione del trinomio 23

12.9 Complementi – Disequazione di secondo grado 24

12.10 Complementi – Esempio di sistema non lineare 25

12.11 Complementi – Un altro sistema non lineare 27

12.12 ESERCIZI SULLA LEZIONE 12[53] 29

12.12.1 Esercizio risolto a – Risoluzione grafica 29

BOZZA - DRAFT

13 Funzioni e dis/equazioni ir/razionali **33**

13.1 Polinomi e funzioni razionali intere[00] 33
13.2 Funzioni e dis/equazioni razionali intere[06] 34
13.3 Equazione x^n·(polinomio di I o II grado)=0[13] 35
13.4 Funzioni e dis/equazioni razionali fratte[19] 37
13.5 Una funzione razionale fratta della Farmacia[25] 38
13.6 Le funzioni radice quadrata e cubica[31] 38
13.7 Funzioni e curve sigmoidi ovvero sigmoidee[38] 40
13.8 Funzioni e dis/equazioni irrazionali[44] 43
13.9 Complementi – Un esempio non banale 45
13.10 Complementi – Un esempio difficile 46
13.11 Complementi – Dis/equazioni con radice quadrata . . 49

BOZZA - DRAFT

12 Piano cartesiano – IV parte

12.1 Parabole e funzioni e dis/equazioni di secondo grado[10]

Come detto, ogni parabola con asse verticale ha un'equazione

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

con qualche $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

La parabola è un oggetto geometrico a cui sono associati – in particolare – 2 oggetti algebrici:

l'equazione di secondo grado e

la disequazione di secondo grado,

che andiamo a esaminare.

BOZZA - DRAFT

12.2 Equazione di secondo grado[17]

Consideriamo per $a \neq 0$ l'equazione detta di secondo grado

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

e la sua parabola associata, avente asse verticale,

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

per esempio l'equazione e la parabola, associate fra loro,

$$2\,x^2 - x + 1 = 0 \qquad y = 2\,x^2 - x + 1$$

Le equazioni di secondo grado hanno una grande ricorrenza nelle Scienze. Per esempio in Chimica, per calcolare il pH di una soluzione di un acido debole il pH della soluzione dipende dalla concentrazione degli acidi e delle basi e dalla costante di dissociazione acida K_a, per esempio 10^{-5}: in alcuni casi, per calcolare il pH è necessario risolvere

BOZZA - DRAFT

quest'equazione di secondo grado

$$x^2 + K_a\, x - K_a\, C_0 = 0$$

essendo C_0 la concentrazione iniziale dell'acido, per esempio 0.1 M. In nota[1] un esempio della Fisica.

Si definisce il discriminante

$$\boxed{\Delta := b^2 - 4ac} \tag{1}$$

Nel piano cartesiano ci sono

6 tipi di parabole con asse verticale,

di generica equazione $y = a\, x^2 + b\, x + c$,

a seconda

BOZZA - DRAFT

[1] Una funzione di secondo grado dà lo spazio

$$s(t) = 9.81\, \frac{t^2}{2} + v_0\, t$$

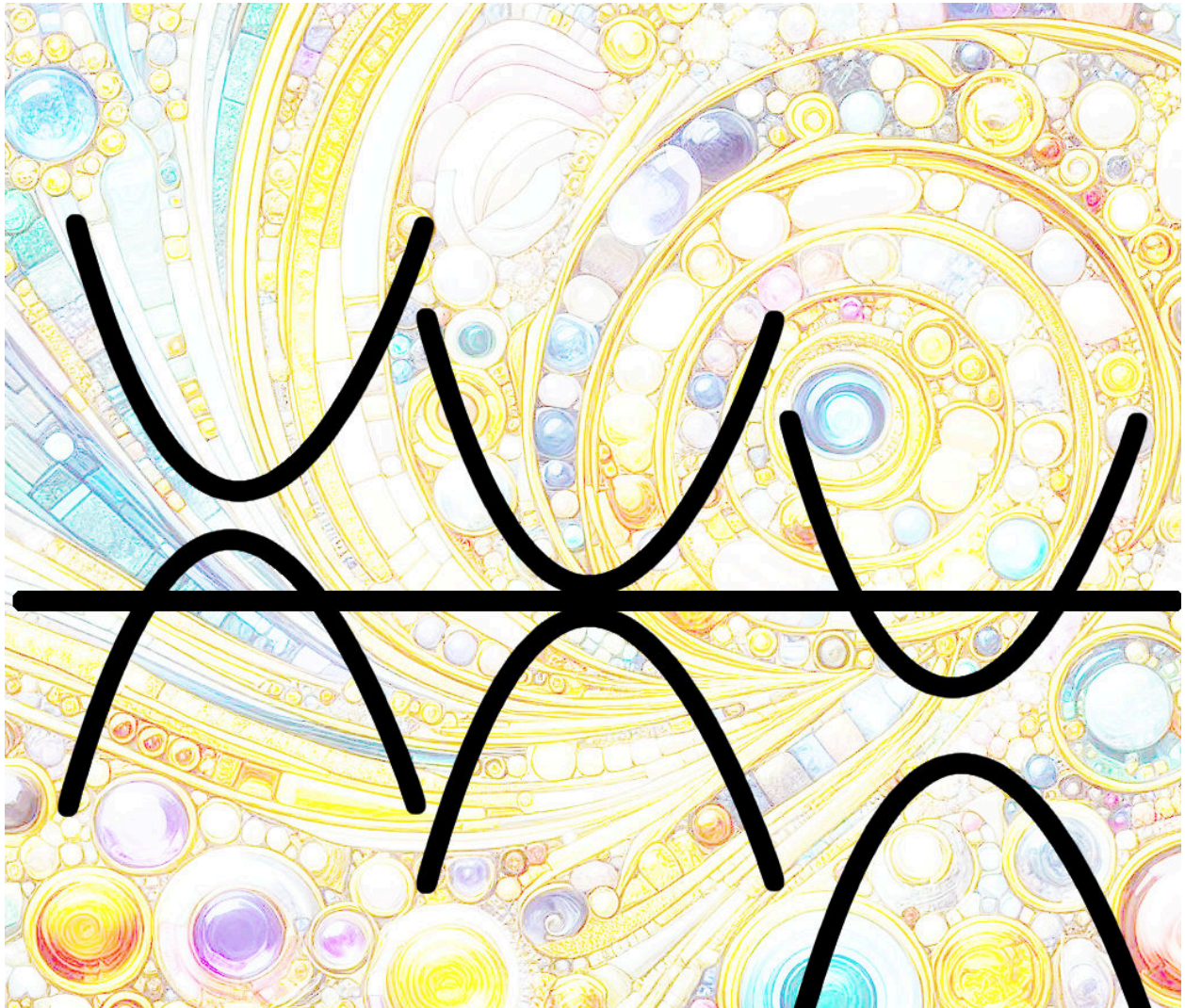
percorso al tempo t da un corpo partito verso il basso con velocità v_0, nel campo gravitazionale terrestre, da altezza non troppo elevata, supposta la forma tale da rendere insignificante l'attrito con l'aria.

di sgn(a) (positivo o negativo, 2 casi, lo 0 è escluso) e
di sgn(Δ) (positivo o nullo o negativo, 3 casi).

$a > 0$ $\Delta > 0$	$a > 0$ $\Delta = 0$	$a > 0$ $\Delta < 0$	$a > 0$ allora verso l'alto
$a < 0$ $\Delta > 0$	$a < 0$ $\Delta = 0$	$a < 0$ $\Delta < 0$	$a < 0$ allora verso il basso

BOZZA - DRAFT

I 6 cioè 3×2 casi sono rappresentati nella figura seguente.



La parabola interseca[2] l'asse x in

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{se } \Delta \geq 0} \tag{2}$$

e sono le soluzioni dell'equazione di secondo grado associata

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

e altrimenti se $\Delta < 0$ l'intersezione non avviene mai, e non ci sono soluzioni ovvero ci sono 0 soluzioni.

BOZZA - DRAFT

[2] Vale anche questa *formula ridotta*

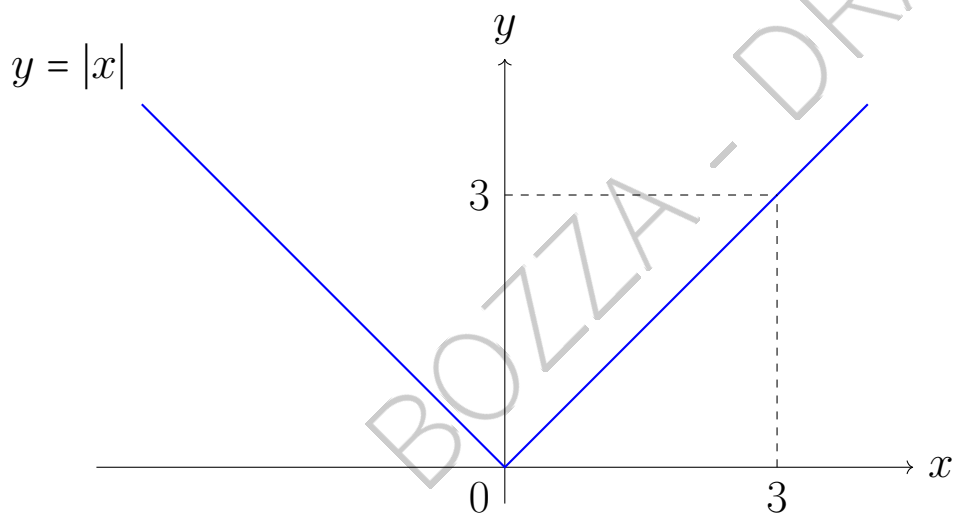
$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} \qquad \frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - a\,c$$

utile se b è intero pari.

12.3 Valore assoluto, e relative dis/equazioni[24]

Il valore assoluto in $\mathbb{R}$, già definito,

$$|x| := \begin{cases} x & se \ x \geq 0 \\ -x & se \ x < 0 \end{cases}$$



BOZZA - DRAFT

verifica queste proprietà:

$$|x| \geq 0$$

$$|-x| = |x|$$

$$|x|^2 = x^2$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \text{ e similmente } \left(\forall\, y \neq 0\right)\ |x/y| = |x|/|y|$$

$$|f(x)| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

$$\left(\forall\, a > 0\right)\quad |f(x)| = a \Leftrightarrow f(x) = -a \vee f(x) = a$$

$$\left(\forall\, a \geq 0\right)\quad |x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a \ \ e\, analoga\, con\ \geq$$

$$\left(\forall\, a > 0\right)\quad |x| \leq a \ \Leftrightarrow\ -a \leq x \leq a \quad \text{ovvero}$$

$$\begin{cases} x \geq -a \\ x \leq a \end{cases}$$

e molte altre[3]. Il valore assoluto ricorre un'infinità di volte nelle Scienze Applicate. Nel prossimo paragrafo ne vedremo alcune, e

BOZZA - DRAFT

[3]Per il lettore interessato, ecco alcune altre formule sul valore assoluto:

$$\|x\| = |x|$$

$$|x| = x \cdot \operatorname{sgn}(x)$$

per intanto osserviamo che $|t|$ rappresenta una distanza temporale dall'istante 0, sia dopo che prima di 0.

BOZZA - DRAFT

$$x = |x| \cdot \operatorname{sgn}(x)$$

$$|x^n| = |x|^n \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},\quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

$$|x^\alpha| = |x|^\alpha \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\left(\forall\, a \geq 0\right) \quad |f(x)| > a \Leftrightarrow f(x) < -a \vee f(x) > a \quad \textit{e analoga con } \geq$$

$$\left(\forall\, a > 0\right) \quad |f(x)| \leq a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq -a \\ f(x) \leq a \end{cases}$$

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}$$

e i 3 = possono sostituirsi con tutti e 4 i segni di disuguaglianza.

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

e l'ultima si chiama *disuguaglianza triangolare.*

12.4 Errore assoluto, relativo e percentuale[31]

Nelle successive formule, si noti che bisogna conoscere il valore esatto di una grandezza considerata (questione delicata).

Si definiscono

$$\text{errore assoluto [rispetto all'esatto]} := |approx - esatto|$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{errore relativo [rispetto all'esatto] [in forma percentuale]}\\ \text{ovvero errore percentuale [rispetto all'esatto]}\\ = \frac{|approx - esatto|}{esatto} \cdot 100\%\end{array}} \tag{3}$$

talvolta chiamato ancora più semplicemente errore.
(In Matematica si preferisce la versione non percentuale).

BOZZA - DRAFT

Nelle Scienze Applicate ci vorrà grande cautela nell'applicare queste 3 formule perché i *valori misurati* vanno intesi in generale come *approssimati*, come nell'Esempio 1.

Esempio 1: le tolleranze della Farmacopea sull'uniformità di massa delle compresse (da verificare possibili variazioni nel tempo) sono $\pm 10\%$ fino a 80 mg, $\pm 7,5\%$ fra 80 e 250 mg, $\pm 5\%$ oltre.
Tecnicamente si fa così: si pesano singolarmente 20 compresse e se ne calcola la massa media. Le compresse superano la prova se:
– al massimo 2 si scostano dalla media più della percentuale indicata;
– nessuna si scosta più del doppio di quella percentuale.
Nota. Tolleranza $\pm 10\%$ significa errore relativo $\leq 10\%$ rispetto al valore di riferimento (nominale, o medio).

Esempio 2.$_\mu$ All'inizio i 46 cromosomi umani furono contati 44:
$errore\,assoluto\,[rispetto\,l'esatto]: 2$
$errore\,percentuale\,[rispetto\,l'esatto]: \approx 4.3\%$ (diciamo pure 4%).

BOZZA - DRAFT

Esempio 3 – Errore dell'approssimazione 3.14 L'approssimazione 3.14 del valore di π ha errore (percentuale) dell'ordine dello 0.5 per mille.

$$\text{errore percentuale rispetto all'esatto} := \frac{|3.14 - \pi|}{\pi} \cdot 100\% =$$

$$= \frac{|3.14 - 3.14159265...|}{3.14159265...} \cdot 100\% \approx \frac{|3.14 - 3.14159265|}{3.14159265} \cdot 100\% \approx 0.051\% \approx 0.05\%$$

(Meno dell'1 per 1000, anzi circa lo 0.5 per mille).

(Alcuni Autori distinguono l'errore percentuale positivo da quello negativo, togliendo il valore assoluto nella formula. Nell'esempio di π l'errore sarebbe $\approx -0.051\%$: negativo perché 3.14 sottostima π).

BOZZA - DRAFT

12.5 La sezione aurea[39]

La sezione aurea è[(4)] l'unica soluzione positiva dell'equazione

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

ed escludendo la radice negativa, troviamo la soluzione che denotiamo con φ

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \quad \text{sezione aurea} \tag{4}$$

BOZZA - DRAFT

[4]La sezione aurea è anche l'unico numero $x > 0$ che sia *medio proporzionale* fra 1 e $1+x$, cioè soluzione di

$$1 : x = x : (1+x) \qquad (*)$$

che si calcola riscrivendo la proporzione $(*)$ in questa forma, e poi risolvendo un'equazione di secondo grado:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1+x} \qquad / \cdot x \cdot (1+x)$$

Questo numero φ tende a ricorrere nelle Scienze Naturali.
LINK->
È molto collegato alla successione di Fibonacci e viene talvolta considerata, un po' immaginosamente, una base dell'Estetica. Mnemonico: `E' felice e delicata`.

12.6 Esempio chimico-farmaceutico[46]

Un acido debole HA sciolto in acqua con concentrazione iniziale C_0 si dissocia solo in parte: $HA \rightleftharpoons H^+ + A^-$. Detta x la concentrazione (in mol/L, ovvero M) degli ioni H^+ che si formano, all'equilibrio vale

$$K_a = \frac{x^2}{C_0 - x}$$

dove K_a è la *costante di dissociazione* dell'acido. Moltiplicando per $C_0 - x$ e portando tutto a sinistra si ottiene l'equazione di secondo

BOZZA - DRAFT

grado nell'incognita x

$$x^2 + K_a\, x - K_a\, C_0 = 0$$

e da x si ricava il pH: pH = $-\lg x$. (Logaritmo: studieremo in seguito).

Come fanno spesso i chimici. Se l'acido è molto debole (K_a molto piccola rispetto a C_0) se ne dissocia pochissimo, cioè x è piccolissimo rispetto a C_0, e allora si approssima $C_0 - x \approx C_0$:

$$K_a \approx \frac{x^2}{C_0} \qquad \Rightarrow \qquad x \approx \sqrt{K_a\, C_0}$$

evitando l'equazione di secondo grado. Spesso va benissimo, ma non sempre.

Quando l'approssimazione fallisce. Con $K_a = C_0 = 0.01$ (un acido con p$K_a = 2$ in soluzione 0.01 M) l'equazione è

$$x^2 + 10^{-2}\, x - 10^{-4} = 0$$

BOZZA - DRAFT

$$\Delta = 10^{-4} + 4 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-4} \qquad \sqrt{\Delta} = 10^{-2}\sqrt{5}$$

$$x_{1,2} = \frac{-10^{-2} \pm 10^{-2}\sqrt{5}}{2}$$

e scartando la soluzione negativa (una concentrazione non può esserlo)

$$x = 10^{-2}\,\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{10^{-2}}{\varphi} \approx 6.18 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{M} \qquad \mathrm{pH} = -\lg x \approx 2.21$$

L'approssimazione $x \approx \sqrt{K_a C_0} = 10^{-2}$ darebbe invece pH = 2.00, con errore relativo sulla concentrazione $\varphi - 1 \approx 61.8\%$: qui l'equazione di secondo grado non si può evitare.

Con $K_a = C_0$ risulta sempre $x = C_0/\varphi$: ricompare la sezione aurea (4).

BOZZA - DRAFT

Complementi

BOZZA - DRAFT

12.7 Complementi – 3 metodi per disegnare una parabola

(a) Un disegno approssimativo (del grafico) della parabola (di equazione)

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

(essendo a, b, c valori numerici noti) si ottiene per punti, e i 7 punti con queste coordinate *spesso* basteranno:

$x = -3; y = y(-3)$ ← calcolare con l'equazione soprastante
$x = -2; y = y(-2)$
$x = -1; y = y(-1)$
$x = -0; y = y(-0)$
$x = 1; y = y(1)$
$x = 2; y = y(2)$

$x = 3; y = y(3)$
(Oppure altri punti, se ritenuti più idonei).

(b) Oppure con i seguenti 7 passaggi, in effetti 8 in casi "sfortunati".

1) Si calcola il valore $-\frac{b}{2a}$.
2) Si segna quel valore sull'asse x.
3) Si disegna la retta verticale per il punto or ora segnato: quello è l'asse di simmetria della parabola.
4) Si calcola l'ordinata del vertice

$$y_V = y\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

5) Si segna il vertice V sull'asse di simmetria, con l'ordinata or ora calcolata.
6) Si segna il punto $Q = (0, c)$ che ovviamente appartiene alla parabola.
7) Se V e Q sono 2 punti diversi, con l'aiuto dell'asse di simmetria potete disegnare approssimativamente la parabola facendola passare per quei 2 punti, con sorta di "vaschetta" in V.
8) Se invece $V = Q$, tenete anche conto che:
se $a > 0$ la parabola è rivolta verso l'alto e se $a < 0$ verso il basso.

BOZZA - DRAFT

(c) Ovviamente usare WolframAlpha per disegnare le parabole è più semplice, affidabile, e professionale.

12.8 Complementi – Fattorizzazione del trinomio

Se x_1 e x_2, dati dalla soprastante formula risolutiva dell'equazione di secondo grado, sono

- le *radici* (eventualmente coincidenti) del *polinomio* $a\,x^2 + b\,x + c$,
- ovvero le *soluzioni* dell'*equazione* $a\,x^2 + b\,x + c = 0$,
- ovvero se $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$ sono le *intersezioni* della parabola con l'asse x,

allora vale questa

Formula di fattorizzazione del polinomio di secondo grado con $\Delta \geq 0$

$$\boxed{a\,x^2 + b\,x + c \equiv a\,(x - x_1)(x - x_2)} \tag{5}$$

BOZZA - DRAFT

12.9 Complementi – Disequazione di secondo grado

Risolviamo per esempio

$$-2\,x^2 - 2\,x + 12 > 0 \qquad \Big/ : (-2) < 0$$

$$x^2 + x - 6 < 0$$

e adesso che il *coefficiente principale* (cioè quello di x^2) è 1 applichiamo la (5) con le soluzioni $x_1 = 2$ e $x_2 = -3$ dell'*equazione associata*, trovate con le (1) e (2):

$$(x-2)(x+3) < 0 \tag{6}$$

Risolviamo, in ogni caso col $>$, le 2 disequazioni di primo grado

$x - 2 > 0$ ... $x > 2$

$x + 3 > 0$ ... $x > -3$

e allora nella regione intermedia, $-3 < x < 2$, il prodotto è negativo, e in conclusione, siccome in questo caso avevamo il < 0 in (6),

BOZZA - DRAFT

$$\boxed{-3 < x < 2}$$

Questo procedimento del *prodotto dei segni* si può usare anche per più di 2 termini moltiplicati, magari con uno *schema di prodotto dei segni*, che non approfondiamo.

(Altri Autori risolvono la disequazione di secondo grado col disegno della parabola).

12.10 Complementi – Esempio di sistema non lineare

Esercizio$_\mu$
La Formula di Keys – fra i numerosi standard – calcola

$$peso\,ideale\,uomini = (statura\,in\,metri)^2 \times 22.1 \qquad (*)$$

Per quale statura (realistica) essa dà – per gli uomini – lo stesso peso della Formula di Broca

$$peso\,ideale = (statura\,in\,centimetri - 100) \pm 10\%$$

intesa senza la tolleranza del 10%?

BOZZA - DRAFT

Svolgimento
La Formula di Broca intesa senza la tolleranza del 10% è ovviamente

$$peso\,ideale = statura\,in\,centimetri - 100$$

ovvero

$$peso\,ideale = (statura\,in\,metri - 1) \times 100 \qquad (**)$$

da mettere a sistema con la $(*)$:

$$\begin{cases} p = 22.1\,h^2 & \text{che è la } (*) \\ p = 100\,(h-1) & \text{che è la } (**) \end{cases}$$

che è un sistema (non lineare) di 2 equazioni in 2 incognite, e uguagliando si ha successivamente

$$22.1\,h^2 = 100\,(h-1)$$

$$22.1\,h^2 - 100\,(h-1) = 0$$

$$22.1\,h^2 - 100\,h + 100 = 0$$

$$h_{1,2} = \frac{50 \pm \sqrt{50^2 - 22.1 \cdot 100}}{22.1}$$

BOZZA - DRAFT

$$h \approx 3.03 \quad \vee \quad h \approx 1.49$$

e ovviamente la prima soluzione non ha senso dal punto di vista della realtà sensibile (è ovvio che tutte queste formule hanno un certo dominio entro il quale funzionano bene, e poi perdono significato nella realtà).

$$\boxed{\approx 149\,cm}$$

(Il peso ideale corrispondente sarebbe $\approx 49\,kg$).

12.11 Complementi – Un altro sistema non lineare

Esempio oltre il livello che ci prefiggiamo.
Questo ***sistema di equazioni e disequazioni*** in 2 incognite

$$\begin{cases} x\,y = 0 & \leftarrow rappresenta\,2\,rette,\ x = 0\,e\,y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 \le 0 & \leftarrow rappresenta\,1\,cerchio,\ C(1,1),\ r = 1 \end{cases}$$

equivale a

$$\begin{cases} x = 0 \vee y = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1 \end{cases} \tag{7}$$

BOZZA - DRAFT

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ (0-1)^2 + (y-1)^2 \le 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ (x-1)^2 + (0-1)^2 \le 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ (y-1)^2 \le 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ (x-1)^2 \le 0 \end{cases} \tag{8}$$

ha soluzione, come anche si vedeva subito graficamente,

$$\boxed{\Big(x = 0 \wedge y = 1\Big) \vee \Big(x = 1 \wedge y = 0\Big)}$$

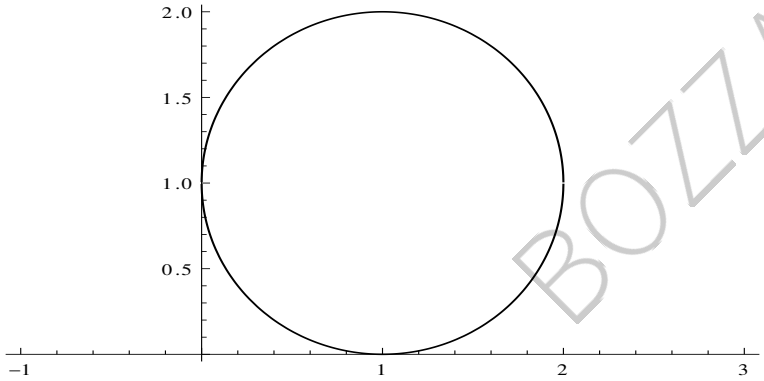


Figura 2: Il cerchio ("pieno") e l'unione delle 2 rette del sistema

BOZZA - DRAFT

12.12 ESERCIZI SULLA LEZIONE 12[53]

12.12.1 Esercizio risolto a – Risoluzione grafica

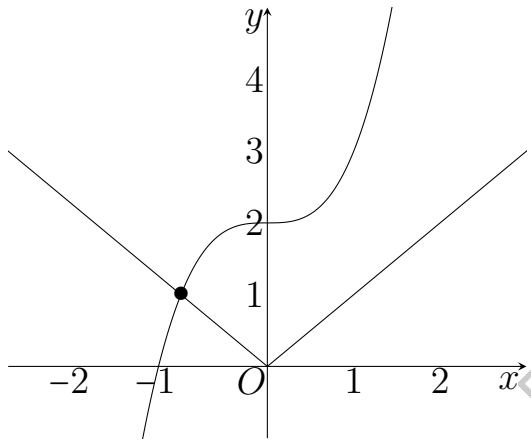
ESERCIZIO$_{\mu 2024}$ $*$ Risolvere per via grafica il sistema di equazioni

$$\begin{cases} y = |x| \\ y = x^3 + 2 \end{cases}$$

(dando la soluzione nella forma $x = \ldots$, $y = \ldots$).

SVOLGIMENTO

BOZZA - DRAFT



Già bastano questi pochi (valori delle coordinate di) punti dei 2 grafici

x	$\lvert x\rvert$
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2

BOZZA - DRAFT

x	$x^3 + 2$
-2	-6
-1	1
0	2
1	3
2	10

e disegnando (vedi figura) sullo stesso piano cartesiano grafici (approssimativi), vediamo subito che c'è un punto di intersezione $(-1, 1)$, e non esistono altri per le proprietà elementari delle funzioni $|x|$ e x^3, e allora la soluzione del sistema di equazioni è data dalle coordinate x e y dell'unico punto di intersezione dei grafici:

$$\boxed{x = -1,\ y = 1}$$

BOZZA - DRAFT

III – Funzioni elementari, con equazioni e disequazioni

BOZZA - DRAFT

13 Funzioni e dis/equazioni ir/razionali

13.1 Polinomi e funzioni razionali intere[00]

Un polinomio è una *scrittura* come $4 + 2\,x - x^2$ o addirittura
$2\,x^7 - \frac{3}{2}\,x^5 + \sqrt{3}\,x^2 - x + 2$ e in generale

$$a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots + a_n\,x^n$$

e n è il *grado* se $a_n \neq 0$.
Il polinomio definisce una funzione *razionale intera* o *polinomiale*

$$f(x) := a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots + a_n\,x^n$$

Naturalmente f e x sono solo 2 degli infiniti nomi possibili.
Per esempio, con gradi 4, 3 e 1 rispettivamente:

$g(t) := t^4 + t + 4$
$temperatura(tempo) := 2 \cdot tempo^3 + 100$
$tempo(temperatura) := \frac{1}{2} \cdot temperatura - 30$

Polinomio:

numero +
+ numero·x +
+ numero·x^2 +
+ numero·x^3 +
+ ... +
+ numero·x^{grado}

BOZZA - DRAFT

Esistono similmente polinomi in più variabili, come $x^2 + x^8\,y^2 - 1$, del cui grado (che comunque in questo esempio è 10) non ci occuperemo.

13.2 Funzioni e dis/equazioni razionali intere[06]

Limitandosi ad 1 variabile, sia essa x, le

equazioni razionali intere

e le

disequazioni razionali intere

sono predicati con uguaglianza o disuguaglianza fra polinomi, che dopo opportune riduzioni che popolarmente si dicono "portare le x a sinistra", assumono una di queste forme, essendo $P(x)$ un polinomio:

Equazioni:	Disequazioni:
polinomio $= 0$	polinomio > 0
	polinomio < 0
	polinomio ≥ 0
	polinomio ≤ 0

$$P(x) \quad \text{segno di dis/uguaglianza} \quad 0$$

e ci limiteremo solo alle disequazioni di I grado, già trattate, del tipo $a\,x + b$ segno di dis/uguaglianza 0, e a poche altre.

BOZZA - DRAFT

13.3 Equazione x^n·(polinomio di I o II grado)=0[13]

Dopo aver imparato a risolvere le equazioni di primo e secondo grado

$$a\,x + b = 0 \qquad a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

vediamo[(5)] le equazioni

$$x^n \cdot (\text{polinomio di I o II grado}) = 0$$

Esse hanno queste soluzioni:
0 e ogni eventuale soluzione del polinomio di I o II grado.

ESERCIZIO$_\mu$
La Formula di Livi per il peso ideale è
$peso\,ideale = (2.37 \times altezza\,in\,metri)^3$
La Formula di Keys per il peso ideale per le donne è
$peso\,ideale\,donne = (altezza\,in\,metri)^2 \times 20.6$
Per quali altezze (realistiche) danno lo stesso peso, e quale?

BOZZA - DRAFT

[5] Naturalmente si potrebbero considerare casi più complessi: si vedano i Complementi a questa Lezione.

Per la generica equazione di III e IV grado esistono complicate formule, trovate da matematici italiani nel XVI secolo, che non tratteremo.

Detta h l'altezza in metri – unità di misura che metteremo nella soluzione ma ometteremo nei calcoli – abbiamo l'equazione di $3^\wedge$ grado

$$(2.37\,h)^3 = 20.6\,h^2$$

e successivamente

$$2.37^3 \cdot h^3 - 20.6\,h^2 = 0$$

che è equazione *cubica*, ovvero *razionale intera di terzo grado*, ma del tipo "favorevole" $x^n \cdot$ (polinomio di I o II grado) $= 0$, salvo che adesso l'incognita si chiama h e non x:

$$h^2 \cdot (2.37^3 \cdot h - 20.6) = 0$$

$$h = 0\ (non\,realistica) \quad 13.312053\,h = 20.6$$

e allora

$$h = \frac{20.6}{13.312053}$$

$$p = \left(\frac{20.6}{13.312053}\right)^2 \cdot 20.6$$

$$\boxed{\begin{array}{c} h \approx 1.55\,m \\ p \approx 49.3\,kg \end{array}}$$

BOZZA - DRAFT

13.4 Funzioni e dis/equazioni razionali fratte[19]

Ovviamente l'*equazione razionale fratta*

$$\begin{matrix} polinomio \to \\ polinomio \to \end{matrix} \quad \frac{N(x)}{D(x)} = 0$$

ha la stessa soluzione dell'equazione razionale intera

$$N(x) = 0$$

tolte le eventuali radici del denominatore.

La *disequazione razionale fratta*

$$\begin{matrix} polinomio \to \\ polinomio \to \end{matrix} \quad \frac{N(x)}{D(x)} > 0$$

ha la stessa soluzione di $N(x) > 0$ se sappiamo che il denominatore è positivo per ogni x, per esempio se il denominatore è $x^2 + 1$.
Se invece non sappiamo se il denominatore è sempre positivo, si ha un caso più complicato, di cui non ci occuperemo (e sicuramente rarissimo in Farmacia).

BOZZA - DRAFT

13.5 Una funzione razionale fratta della Farmacia[25]

Mostriamo una funzione razionale fratta di interesse farmaceutico, almeno teorico, in quanto si è mostrato in un articolo scientifico (su un campione di 363 bambini) che, almeno per l'età pediatrica, approssima abbastanza bene i risultati della formula di Mosteller per l'area della superficie corporea (dato di interesse per esempio nel dosaggio dei chemioterapici), più complessa da calcolare:

$$AreaSuperficieCorporea = BSA = \frac{4w + 7}{90 + w}$$

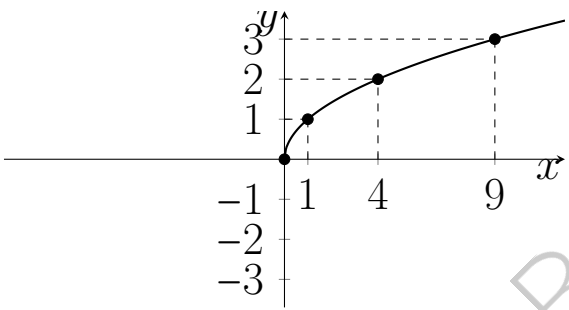
essendo w il peso in chilogrammi: "It can safely replace Mosteller formula and dispense the need for time-consuming calculations."
In: https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/19430073/

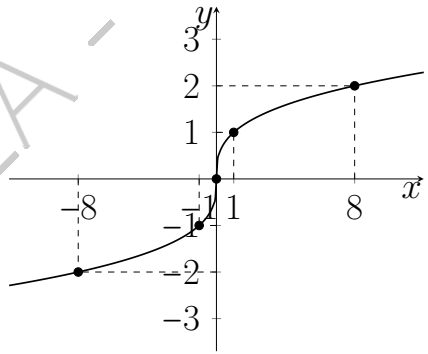
BOZZA - DRAFT

13.6 Le funzioni radice quadrata e cubica[31]

Abbiamo visto nel ripasso di algebra cosa sono la radice quadrata di un numero $x \geq 0$ e la radice cubica di un numero x qualunque.

Al variare di x si ottengono le funzioni radice quadrata e cubica. Sono entrambe crescenti. Per $x \geq 0$ queste 2 funzioni hanno grafici qualitativamente simili che si intersecano in $(0,0)$ e $(1,1)$ ma per x sufficientemente grande[6] la radice cubica cresce più lentamente della radice quadrata. (Valgono entrambe $+\infty$ in $+\infty$ nel senso del limite che vedremo, ma la radice cubica ci arriva "più lentamente").





BOZZA - DRAFT

[6] In effetti già per $x > 0.087791...$

13.7 Funzioni e curve sigmoidi ovvero sigmoidee[38]

Diremo – scegliendo una fra molte definizioni – che una funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

(e anche la curva che è suo grafico) è sigmoide, o è sigmoidea, o è una sigmoide, se ha prima la concavità verso l'alto e poi verso il basso, lasciando all'intuito del lettore il concetto – difficile da definire – di concavità.

Il grafico della radice cubica è una (curva) sigmoide.

Fra le parecchie varianti, molti Autori richiedono anche la limitatezza e cioè l'esistenza di numeri a e b tali che

$$a < f(x) < b.$$

Con quest'aggiunta alla precedente definizione, la radice cubica non è

BOZZA - DRAFT

più sigmoide, perché è illimitata. Funzioni che sono sigmoidi anche con questa definizione più restrittiva sono l'arcotangente, che vedremo, e la logistica standard, che vedremo.[7]

Le funzioni sigmoidi sono semplici modelli per innumerevoli fenomeni delle Scienze Applicate, e in particolare per il numero cumulativo di morti, o di casi, o di ricoveri, eventualmente per milione, di un'ondata epidemica, nel mondo o in uno stato o regione.

BOZZA - DRAFT

[7] E infinite altre fra cui le seguenti.

- Questa funzione che cresce da −1 a 1, mai raggiunti:

$$\frac{x}{1+|x|}$$

- Questa funzione che cresce da −1 a 1, mai raggiunti:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

- Questa funzione correlata alla precedente, che cresce da 0 a 1, mai raggiunti:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

- La tangente iperbolica $\tanh(x)$, che cresce da −1 a 1, mai raggiunti.
- Ogni funzione di Gompertz, che vedremo, che cresce da 0 a un valore a, mai raggiunti.

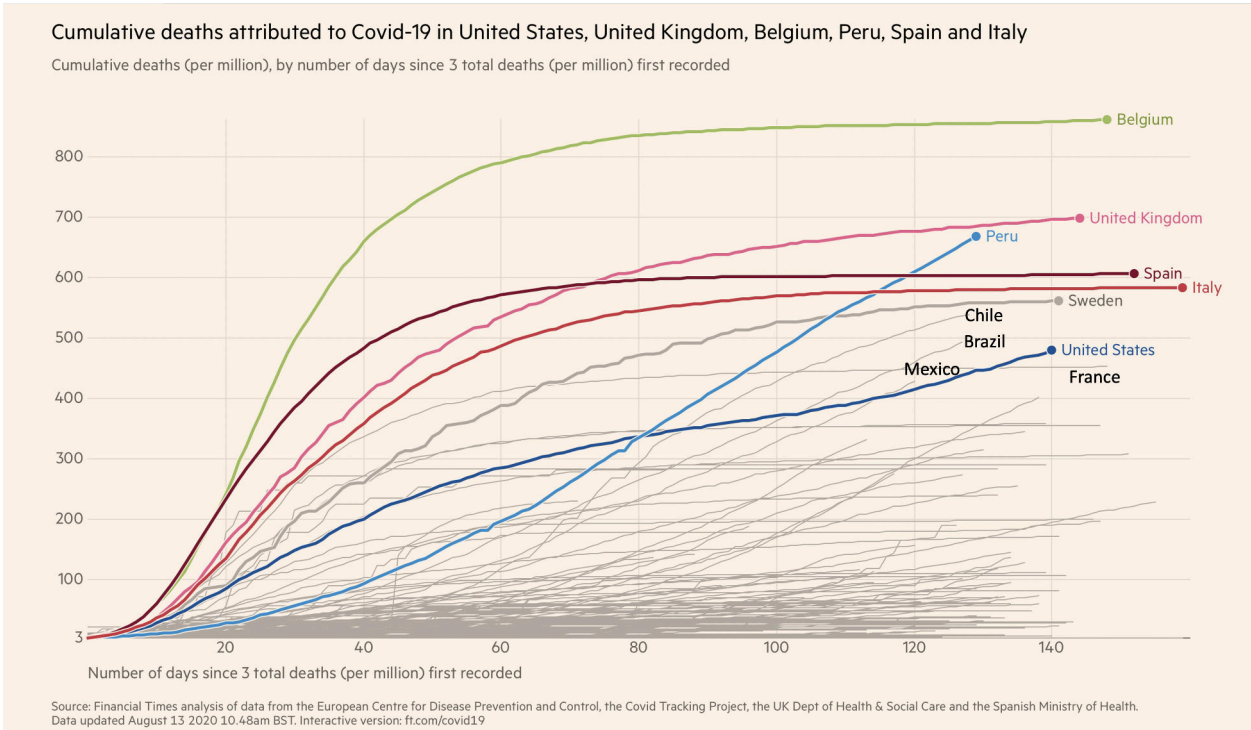


Figura 3: Numero cumulativo di decessi per milione di abitante della pandemia del 2020 verso la metà di agosto 2020, in alcuni stati. (Lo 0 temporale è diverso stato per stato, cioè, per esempio, il giorno 100 dell'epidemia non avviene lo stesso giorno nei vari stati, perchè dipende da quando l'epidemia è iniziata in ogni singolo stato).

13.8 Funzioni e dis/equazioni irrazionali[44]

• Le radici di indice dispari (cubiche, quinte...) sono crescenti su $\mathbb{R}$ e allora l'equazione o disequazione

$$\sqrt[dispari]{f(x)} \ \ qualunque\ segno\ di\ dis/uguaglianza \ \ g(x)$$

si può affrontare semplicemente elevando ambo i membri all'indice (dispari) della radice (che così scompare). Allora si hanno queste 5 semplici equivalenze, che si ricavano subito appunto elevando a potenza conservando l'uguaglianza o l'ordinamento, e allora in definitiva non c'è niente da veramente "imparare a memoria":

$$\begin{array}{lcll} \sqrt[3]{f(x)} & = & g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^3(x) & \\ & > & > & \\ & \geq & \geq & \text{in tutte} \\ & < & < & \text{l'ordinamento} \\ & \leq & \leq & \text{si conserva} \end{array}$$

BOZZA - DRAFT

e il 3 della radice può sostituirsi con ogni indice dispari.

• Il caso delle radici di indice pari (radici quadrate, quarte...) è meno semplice perché sono definite solo sui numeri non negativi.

Vale questa formula di riduzione

$$\sqrt{f(x)} = a \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = a^2$$

e altre che si trovano nei Complementi di questa Lezione.

BOZZA - DRAFT

Complementi

13.9 Complementi – Un esempio non banale

$2\,x^4(-x^2-2x+8)(2-x)(1-x+x^2)=0$ o, disequazione, >0,

oppure altra disequazione con $\geq$ oppure $<$ oppure $\leq$.

Per risolvere *fattorizziamo* il polinomio in fattori di primo grado e/o di secondo grado *irriducibili* ovvero con discriminante negativo. E poi si risolve con uno schema di prodotto dei segni.

Ecco qualche dettaglio per il lettore interessato. Il monomio $2\,x^4$ si fattorizza in $2\,x\cdot x\cdot x\cdot x$ ma in effetti i fattori che sono monomi x^n conviene lasciarli stare come sono. Il polinomio di secondo grado $-x^2-2x+8$, con discriminante positivo, abbiamo visto che è $-1\cdot(x-2)(x+4)$. Il fattore di primo grado $2-x$ è già a posto. E $1-x+x^2$ è irriducibile avendo discriminante negativo, e allora non ha zeri. Si ha

BOZZA - DRAFT

allora la fattorizzazione

$$2\,x^4(-1)(x-2)(x+4)(2-x)(1-x+x^2)\,.$$

L'equazione con $=0$ equivale, considerato che $x^4=0 \Leftrightarrow x=0$,

$$x=0 \;\vee\; x-2=0 \;\vee\; x+4=0 \;\vee\; 2-x=0$$

che dà $x \in \{-4,0,2\}$. La disequazione si fa con lo schema di prodotto dei segni visto in precedenza trovandosi (per ≤ 0) la soluzione $x \leq -4 \vee x=0 \vee x=2$. Per >0 si troverebbe $-4<x<0 \vee 0<x<2 \vee x>2$.

13.10 Complementi – Un esempio difficile

L'equazione e le 4 disequazioni

$$2\,x^9-2\,x^8-22\,x^7+56\,x^6-56\,x^5+32\,x^4 \quad =0,\ >0,\ \geq 0,\ <0, \leq 0$$

si risolvono come in 13.9 una volta che si riconoscesse che questo è proprio il polinomio di prima, ma ora è molto lontano dalla fattorizzazione. Il problema di fattorizzare un polinomio può essere facile, come

BOZZA - DRAFT

è in questo caso, o difficile, o impossibile.
Prima di tutto *raccogliamo* il fattore x^4, subito visto:

$$x^4 \left(2\,x^5 - 2\,x^4 - 22\,x^3 + 56\,x^2 - 56\,x + 32\right)$$

e ci resta da fattorizzare il polinomio $P_5(x)$ di $5^\wedge$ grado. In questo caso si può fare abbastanza facilmente ma in questa trattazione ci limiteremo solo ai casi in cui, arrivati a questo punto, si abbia un polinomio di grado al più 2 (invece qua è 5) e allora si procede come prima.
Per il lettore interessato: prima si raccoglie 2

$$2\left(x^5 - 2\,x^4 - 11\,x^3 + 28\,x^2 - 28\,x + 16\right)$$

in modo da avere un polinomio *monico*, cioè con *coefficiente principale* 1, poi si procede con la Regola di Ruffini, se si può. Cercheremo qua *solo* fattori $x - m$ con m un divisore intero del termine costante: ± 1, ± 2, ± 4, ± 8, ± 16. Allora basta cercare un numero m fra quelli, il quale annulli il polinomio. È $P_5(2) = 0$ e allora dividiamo per $x - 2$ con la Regola di Ruffini:

BOZZA - DRAFT

i coefficienti →	$+1$	-1	-11	$+28$	-28	$+16$
la radice → $+2$	↓	$+2$	$+2$	-18	$+20$	-16
	$+1$	$+1$	-9	$+10$	-8	0 ← sempre così

che dà i coefficienti del quoziente, e allora la fattorizzazione

$$(x-2)(x^4+x^3-9x^2+10x-8)$$

e riprendendo il monomio x^4 e il fattore 2

$$2\,x^4(x-2)(x^4+x^3-9x^2+10x-8)\,.$$

Si continua cercando un fattore $x-m'$ con m' fra i divisori interi di -8, e si trova che 2 annulla il polinomio di quarto grado $P_4(x)$, e allora lo si divide per $x-2$ con la Regola di Ruffini trovando

$$2\,x^4(x-2)(x-2)(x^3+3x^2-3x+4)$$

poi cercando fra i divisori interi di 4 si trova l'annullamento di $P_3(x)$ in -4 da cui con la Regola di Ruffini applicata a $P_3(x)$

$$2\,x^4(x-2)(x-2)(x+4)(x^2-x+1)$$

BOZZA - DRAFT

che è come prima (un fattore è opposto ma congloba il (-1)).

13.11 Complementi – Dis/equazioni con radice quadrata

Per le equazioni valgono queste formule di riduzione

$$\sqrt{f(x)} = a \geq 0 \Leftrightarrow f(x) = a^2$$

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$$

Per le disequazioni valgono queste formule di riduzione

$$\sqrt{f(x)} > a \Leftrightarrow f(x) > a^2 \; se \; a > 0, similmente \geq \tag{9}$$

$$\sqrt{f(x)} < a \Leftrightarrow 0 \leq f(x) < a^2 \; se \; a > 0, similmente \leq \tag{10}$$

e altre formule su cui non insisteremo. Per il lettore interessato ecco altre formule limitatamente alla radice quadrata.

BOZZA - DRAFT

Prima di tutto il caso che diremo **“radice minore"**

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

Poi il caso **“radice minore o uguale"**, similissimo a quello “radice minore":

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \end{cases}$$

e poi 2 casi (similissimi) **“radice maggiore"** e **“radice maggiore o uguale"**:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

BOZZA - DRAFT

Esercizio 1_μ $\sqrt{x^2-9} \geq x-1$.

Esercizio 2_μ $x > \pi + \sqrt{x^2-10}$.

Esempio$_\mu$ Useremo la Formula di Mosteller per l'area della superficie corporea, in questa versione:

$$area \approx \frac{\sqrt{altezza_m \times peso_{kg}}}{6}$$

Considerato un soggetto per un certo tempo, in cui possiamo ritenere costante la sua altezza, sia essa h, può ben variare il suo peso, sia esso x.
Per quel soggetto abbiamo allora una funzione

$$area(x) = \frac{1}{6}\sqrt{h \cdot x}$$

essendo h l'altezza (in metri, costante),

x il peso (in chilogrammi),

$area(x)$ l'area della superficie corporea (in metri quadrati).
Per quali pesi la superficie corporea sarebbe minore di 2 metri quadrati in questo modello?

BOZZA - DRAFT

Abbiamo la disequazione

$$\frac{1}{6}\sqrt{h\cdot x} < 2 \qquad \Big/ \cdot 6 > 0 \text{ (conserva l'ordinamento)}$$

$$\sqrt{h\cdot x} < 12$$

che risolviamo come in (10)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h\cdot x \geq 0 & \Big/ : h > 0 \text{ (conserva l'ordinamento)} \\ h\cdot x < 12^2 & \Big/ : h > 0 \text{ (conserva l'ordinamento)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 & \text{(ovvio, è un peso)} \\ x < \frac{144}{h} \end{cases}$$

$$\big(0 \leq\big)\ x < \frac{144}{h}$$

Per esempio con un'altezza di 1.71 m, $x < 84.2$. (Sotto gli 84 kg, circa).
Per esempio con un'altezza di 1.82 m, $x < 79.1$. (Sotto i 79 kg, circa).

BOZZA - DRAFT

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

Si risolva la seguente disequazione:

$$x > \mathrm{e} + \sqrt{x^2 - 8}$$

SVOLGIMENTO

Essendoci una radice quadrata, cercheremo di ricondurci al caso "radice maggiore" oppure al caso "radice minore", e in effetti in questo caso

$$x > \mathrm{e} + \sqrt{x^2 - 8} \quad \Big/ + (-\mathrm{e})$$

$$x - \mathrm{e} > \sqrt{x^2 - 8}$$
$$\sqrt{x^2 - 8} < x - \mathrm{e}$$

proprio al caso "radice minore", e allora la disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} x^2 - 8 \geq 0 \\ x - \mathrm{e} > 0 \\ x^2 - 8 < (x - \mathrm{e})^2 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x \leq -\sqrt{8} \vee x \geq \sqrt{8} \\ x > \mathrm{e} \\ x^2 - 8 < x^2 - 2\,\mathrm{e}\,x + \mathrm{e}^2 \end{cases}$$

BOZZA - DRAFT

ovvero

$$\begin{cases} x \le -2\sqrt{2} \vee x \ge 2\sqrt{2} \approx 2.82 \\ x > \mathrm{e} \approx 2.718 \text{ che sappiamo a memoria} \\ 2\,\mathrm{e}\,x < \mathrm{e}^2 + 8 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{\mathrm{e}^2+8}{2\,\mathrm{e}} \approx 2.831 \text{ con la calcolatrice dal soprastante} \end{cases}$$

e mettendo in ordine crescente i capisaldi (ovvero valori delimitanti) trovati

.....$-2\sqrt{2}$.....e.....$2\sqrt{2}$.....$\frac{\mathrm{e}^2+8}{2\,\mathrm{e}}$.....
.....|.....|.....|.....|..... schema d'intersezione
~~~~~ – – – – – – – –– ~~~~~~~~~~
– – – – – – – –– ~~~~~~~~~~~~~~~~ ∩
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~ – – ––

otteniamo il soprastante schema d'intersezione che ci dà la soluzione

$$\boxed{2\sqrt{2} \le x < \frac{\mathrm{e}^2+8}{2\,\mathrm{e}}}$$

BOZZA - DRAFT