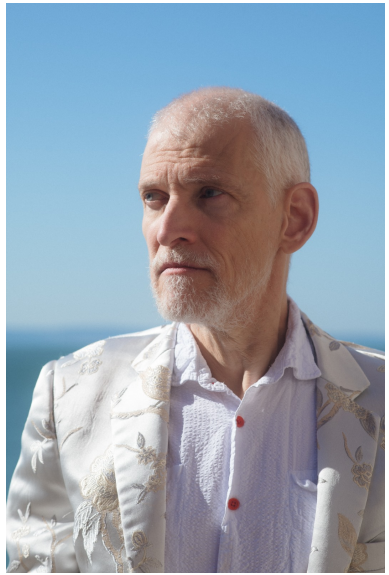
Le Compresse di Matematica per le Scienze della Farmacia

Lezioni 14-16

versione 22 ottobre 2026

BOZZA - DRAFT

Università degli Studi di Trieste



Alessandro Soranzo
Ricercatore universitario
Settore Scientifico Disciplinare:
MATH-03/A - Analisi matematica
Gruppo Scientifico Disciplinare:
01/MATH-03 - Analisi matematica, probabilità e statistica matematica

BOZZA - DRAFT

Indice

14 Esponenziali e logaritmi – I parte **7**
14.1 Vecchie funzioni potenza e nuove esponenziali 7
14.2 Le 4 basi di maggior interesse 9
14.3 L'esponenziale in Farmacia 13
14.4 Una sigmoide basata sull'esponenziale 14
14.5 Logaritmi 17
14.6 I diagrammi logaritmici 19
14.7 Logaritmi in Farmacia e nelle Scienze Applicate . . . 25
14.8 Cenni alla clearance dei farmaci 25
14.9 La curva di Preston 26
14.10 Complementi – Unicità degli esponenziali 32
14.11 Complementi – Clearance dei farmaci 33
14.12 ESERCIZI SULLA LEZIONE 14 34
14.12.1 Esercizio risolto a – Equazione con exp 34

BOZZA - DRAFT

15 Esponenziali e logaritmi – II parte **37**

15.1 Definizione del logaritmo 37
15.2 Logaritmi naturali e decimali; esponenziale 39
15.3 "Trasforma prodotti in somme" 45
15.4 "Trasforma divisioni in sottrazioni" 47
15.5 "Trasforma reciproco in opposto" 47
15.6 "Trasforma la radice ennesima in divisione per n" . . . 48
15.7 "Trasforma l'elevare a potenza in moltiplicare" 49
15.8 Esempi di calcoli coi logaritmi 51
15.9 Prevenire è meglio che curare: errori tipici 53
15.10 Esempio di uso del logaritmo: il pH. 54
15.11 Complementi – Con riferimento alle varie basi 56
15.12 Complementi – Altre proprietà 59
15.13 Complementi – Esempi di calcoli coi logaritmi 61
15.14 ESERCIZI SULLA LEZIONE 15 66

16 Esponenziali e logaritmi – III parte **68**

BOZZA - DRAFT

16.1 Conversioni fra logaritmi naturali e decimali 68
16.2 Calcolo del valore di un logaritmo 69
16.3 Primo passo per il calcolo dei logaritmi 70
16.4 Calcolo approssimato dei logaritmi decimali dei numeri da 1 a 10 70
16.5 Risoluzione pratica delle equazioni con exp e log . . . 74
16.6 Soluzioni spurie ovvero fittizie 83
16.7 Equazioni e disequazioni con exp e log – teoria 85
16.8 L'esponenziale e la campana gaussiana 88
16.9 Funzione di Gompertz 92
16.10 Il logaritmo decimale come contatore di zeri 92
16.11 Ordine di grandezza di un numero positivo 94
16.12 Il decadimento esponenziale, anche in Farmacia . . . 99
16.13 Emivita di una sostanza nel sangue o nelle ossa . . . 100
16.14 Regola pratica su emivita e steady state 102
16.15 L'intensità sonora, i logaritmi e i decibel 103
16.16 Complementi – Il piombo nelle ossa 104

BOZZA - DRAFT

16.17 Complementi – Equazioni con LOG e x libera 108
16.18 Complementi – Fibonacci ed esponenziali 109
16.19 ESERCIZI SULLA LEZIONE 16 113
16.19.1 Esercizio risolto a – Risoluzione per via grafica 113
16.19.2 Esercizio risolto b – Equazione con logaritmi decimali 115
16.19.3 Esercizio risolto c – Equazione con ln e lg . . 117

BOZZA - DRAFT

14 Esponenziali e logaritmi – I parte

14.1 Vecchie funzioni potenza e nuove esponenziali

Già sappiamo il significato della

potenza 2^3 e in generale b^a

di base $b > 0$ ed esponente $a \in \mathbb{R}$

(Se $a > 0$ allora esiste anche per $b = 0$ e vale 0).

Notoriamente, se "liberiamo" la base abbiamo le **funzioni potenza**

x^a per esempio x^2, x^3, x^{10}, $x^{\frac{1}{2}}$

BOZZA DRAFT

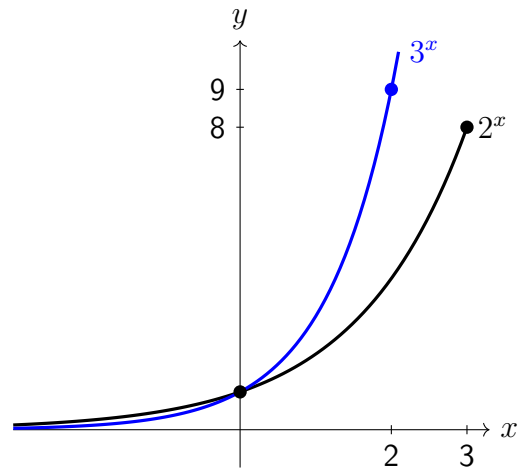
Ma se "liberiamo" l'esponente abbiamo le **funzioni esponenziali**

$$b^x \qquad \text{per esempio } 2^x,\ 3^x,\ 10^x,\ \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

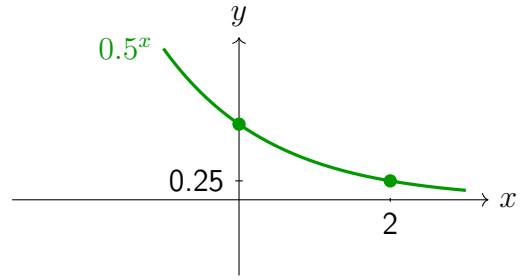
di base 2, di base 3, eccetera; e questa funzione è caratterizzata da

- *"al crescere di 1 della x la b^x si moltiplica per b"*
- *"al diminuire di 1 della x la b^x si divide per b"*

per esempio al crescere di 1 della x la 2^x raddoppia, e la 10^x decuplica.

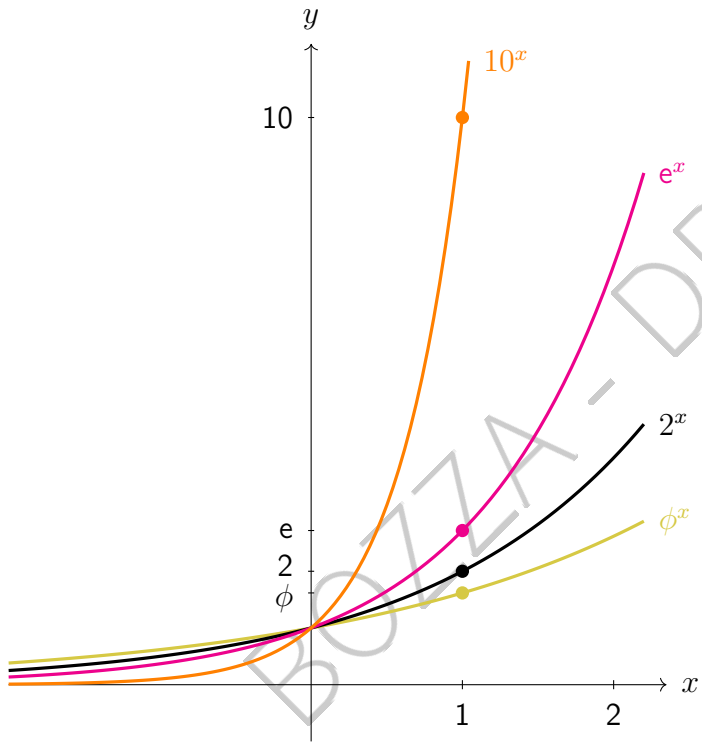


Le funzioni esponenziali modellizzano un'infinità di processi delle Scienze Applicate, con crescenza sempre più rapida se la base è $b > 1$, e decrescenza verso 0 se $0 < b < 1$.
Si vedano online su WolframAlpha i grafici per $x \geq 0$ delle funzioni esponenziali di basi $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 2, 3, che passano tutti per $(0, 1)$ (illustrando la $c^0 = 1$), e le funzioni potenza con esponenti quegli stessi numeri, che passano tutti per $(1, 1)$ (illustrando la $1^c = 1$).



BOZZA DRAFT

14.2 Le 4 basi di maggior interesse



BOZZA - DRAFT

Le **basi** più significative sono queste 4, e vediamo alcuni esempi:

•2: la 2^n dà il num. di sottoinsiemi di un insieme di n elementi;

•φ: la $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$ approssima per intero $n \gg 0$ la successione di Fibonacci,

$$\text{e } \varphi \text{ è la } \textit{sezione aurea}, \ \varphi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618; \tag{1}$$

•10: per la notazione scientifica dei numeri, $x \cdot 10^n$, con n intero;

•e: e^x è la **funzione esponenziale** (senza dire "di base e") ed

e è il numero di Nepero o numero di Eulero, in inglese Euler's number:

$$\boxed{\text{e} \approx \mathbf{2.718}} \tag{2}$$

Per ricordare queste cifre, sono stati realizzati molti mnemonici, frasi[1]

BOZZA - DRAFT

[1] **Mnemonici per le cifre di e.**
Associando ordinatamente ad ogni parola di certe frasi il loro numero di lettere, si ottengono le prime cifre di e. Dello scrivente, in inglese, per esempio:

in cui le lunghezze delle parole corrispondono alle cifre (delle approssimazioni) di e.
In figura (in inglese) uno mnemonico (dello scrivente) per ricordarne le cifre (contando le lettere delle parole).

Of
Eulerus
e
constant.
Dello scrivente, in italiano:

> *"La loquela è vincente* $\leftarrow 2,7,1,8$
> *ma talvolta è migliore il silenzio,* $\leftarrow 2,8,1,8,2,8$
> *come disse Aristocle."* $\leftarrow 4,5,9$

i numeri delle lunghezze delle parole, si ottengono le prime cifre significative di e: $2,7,1,8,2,8,1,8,2,8,4,5,9$.
Fra le molte molte frasi analoghe, una famosa con le stesse cifre è

> *"Ai modesti o vanitosi*
> *ai violenti o timorosi*
> *do, cantando gaio ritmo,*
> *logaritmo."*

BOZZA - DRAFT



e ≈ 2.718 HE BECOMES A DICTATOR

```
2 ← HE
7 ← BECOMES
1 ← A
8 ← DICTATOR
```

Altre notazioni:

e^x si denota $\exp x$ o meglio $\exp(x)$.

Raramente, e in questo testo quasi mai, si scrive anche

$$\exp_b a \text{ per intendere } b^a, \text{ per esempio } \exp_2 3 = 8$$

Nota sul valore esatto di e. Questo numero è parente di pi greco, e come quello è irrazionale (e, come quello, pure *trascendente*). Il suo valore esatto è la "somma infinita" (serie) dei reciproci dei fattoriali dei numeri naturali:

$$\mathrm{e} := \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

14.3 L'esponenziale in Farmacia

L'esponenziale ha una ricorrenza enorme nelle Scienze Applicate.

Ecco un'equazione classica della Farmacia, e precisamente della Farmacocinetica, che coinvolge l'esponenziale:

$$C = \frac{\dot{m}}{K} + \left(C_o - \frac{\dot{m}}{K}\right) \mathrm{e}^{-\frac{K \cdot t}{V}} \quad (2)$$

[2] Si veda https://en.wikipedia.org/wiki/Clearance_(pharmacology). Il simbolo $\dot{m}$ indica la *derivata di m rispetto al tempo*, si veda la Lezione **??**.

BOZZA - DRAFT

L'esponenziale modellizza bene sia la fase iniziale di un'epidemia, che la fase iniziale dell'espansione di una popolazione microbica in coltura. La successione di Fibonacci, che sostanzialmente è ben approssimata da $\frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n$ che è una funzione esponenziale, è un buon modello:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89...

Un buon modello dello sviluppo successivo è la logistica, definita pur essa con l'esponenziale, che viene illustrata nel paragrafo seguente.

BOZZA - DRAFT

14.4 Una sigmoide basata sull'esponenziale

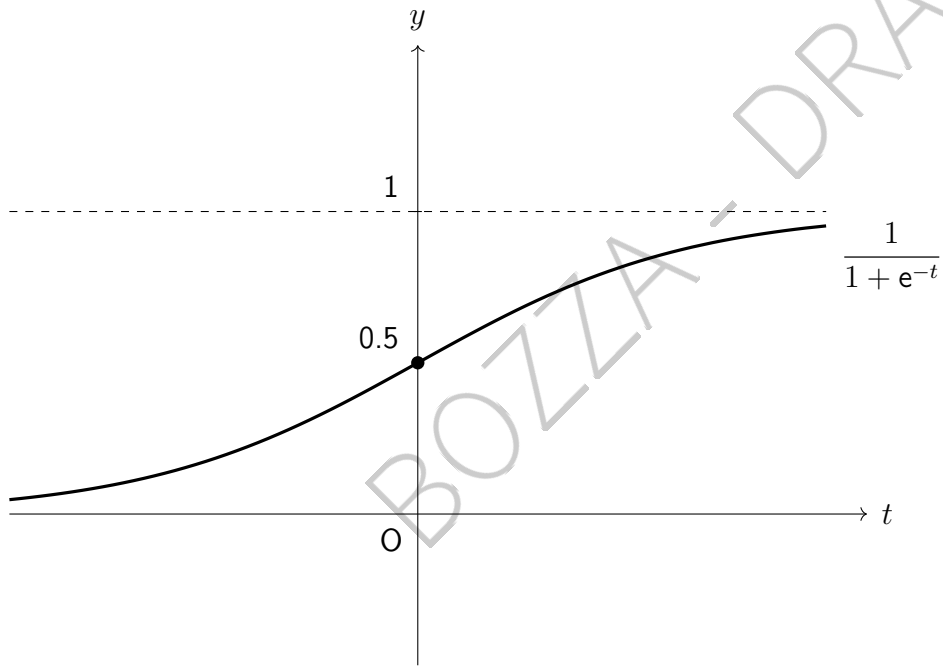
Una questione interessante è quella della *logistica standard*

$$f(t) := \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-t}}$$

un'altra funzione sigmoide ovvero con grafico una curva sigmoide.

È correlata allo sviluppo di una popolazione (animale, microbica...)

quando si consideri che, ad un certo punto – e a differenza di quel che si considera nel modello ultra-semplificato della successione di Fibonacci – i vari organismi iniziano ad ostacolarsi a vicenda.



BOZZA - DRAFT

Ricordiamo che le curve sigmoidee hanno un'ampia ricorrenza nelle Scienze Applicate e in Calcolo delle Probabilità.
Per evidenze in Epidemiologia si cerchino in rete immagini con le parole chiave: "first wave" "cumulative".

BOZZA - DRAFT

14.5 Logaritmi

La funzione inversa dell'esponenziale in base b si chiama logaritmo in base b e la vedremo bene nella prossima lezione.

$$\log_{10} 1000 = 3 \text{ perché } 10^3 = 1000$$

Per intanto si noti che tutti gli esponenziali in 0 valgono 1, e allora tutti i logaritmi in 1 valgono 0.
Si disegnino i grafici degli esponenziali e simmetricamente – rispetto alla bisettrice del I e III quadrante – dei logaritmi, fissando le basi 2 e 10.

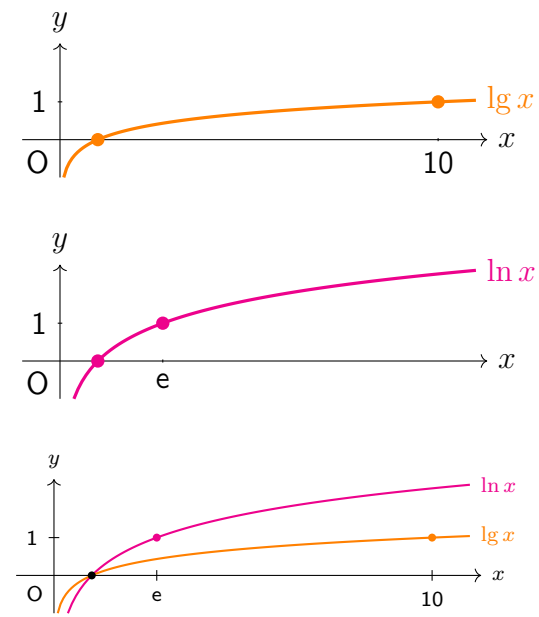
Si verifichi poi online su WolframAlpha.
Sul grafico di WolframAlpha non si vede la simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante perché le scale sugli assi x e y sono diverse.

La funzione logaritmo in base 10 è caratterizzata da
"al decuplicare della x il $\log_{10} x$ cresce di 1"

BOZZA - DRAFT

Logaritmi nelle basi e, 10

e poi entrambe:

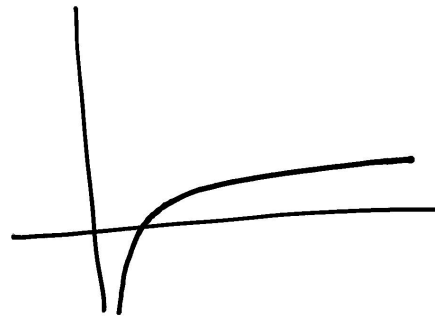


Cresce pianissimo! *("Striscia come un logaritmo").*

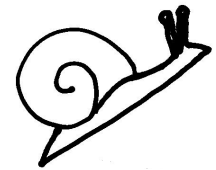
$$\log_{10} 1 = 0 \quad \log_{10} 10 = 1 \quad \log_{10} 100 = 2 \quad \log_{10} 1000 = 3$$

In pratica il logaritmo decimale di 1, 10, 100, 1000, 10000... è il numero di zeri; rimaniamo per ora un po' incerti su quanto valgano il logaritmo decimale degli altri numeri, e gli altri logaritmi.

Il lentissimo crescere del logaritmo ha profonde implicazioni in Analisi Matematica, Teoria dei Numeri, Complessità Computazionale, Fisica, Chimica...



Striscia come un logaritmo



BOZZA - DRAFT

14.6 I diagrammi logaritmici

La lentissima crescenza del logaritmo in base 10 permette la costruzione dei diagrammi in scala logaritmica: invece di rappresentare nel piano cartesiano i punti, poniamo,

$(1, 1)$, $(10, 10)$, $(100\,000, 100\,000)$,

ciò che molto verosimilmente produrrebbe l'indistinguibilità pratica dei primi 2 punti, usiamo i logaritmi di quei numeri, cioè in pratica, in questo caso, il numero di zeri: prima $(0, 0)$, poi $(1, 1)$, poi $(5, 5)$: e vengono punti ben distinguibili all'occhio. Naturalmente bisogna avvertire il lettore della scala logaritmica usata.

La rappresentazione in scala logaritmica può essere applicata a 1 o 2 degli assi del piano cartesiano (ci sono 3 casi denominati lin-log, log-lin e log-log). Per esempio in questo diagramma (semplificato) delle fasi dell'acqua, la scala logaritmica è applicata ai valori della pressione sull'asse delle ordinate.

BOZZA - DRAFT

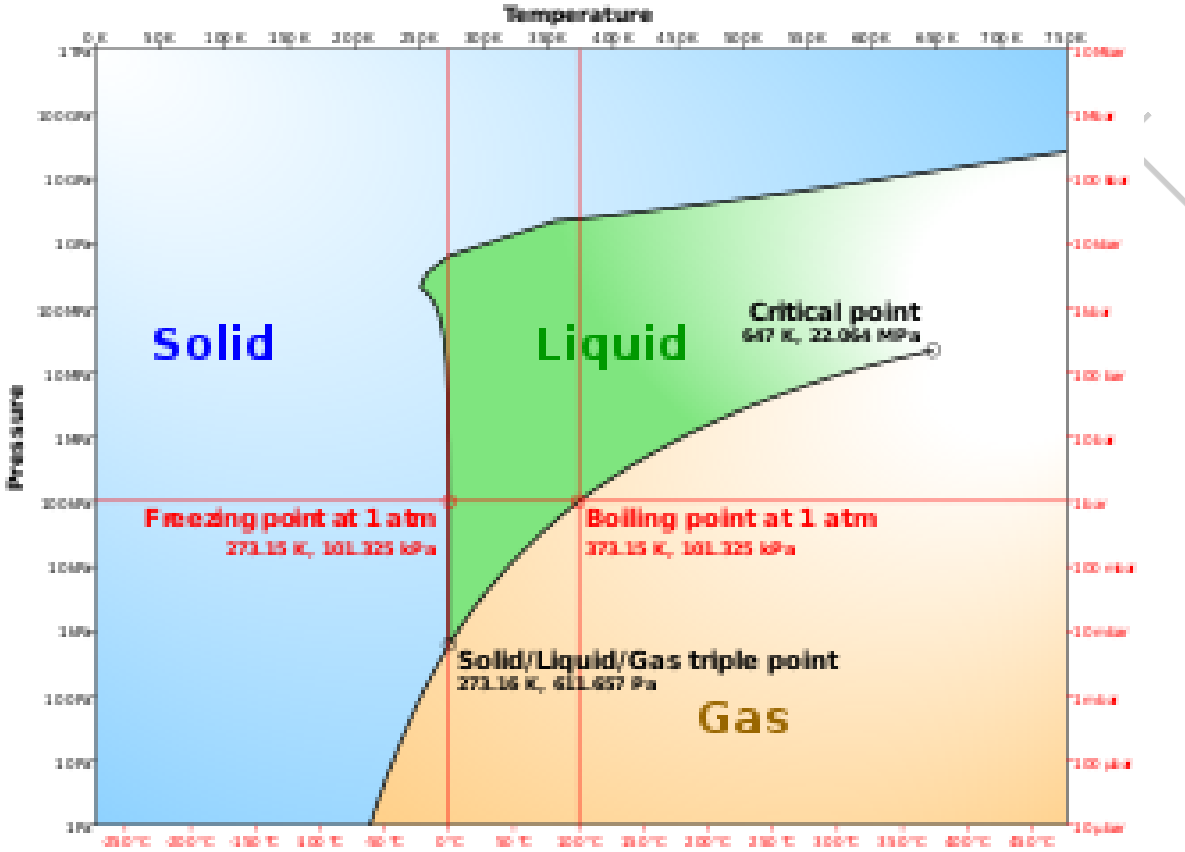


Figura 1: Diagramma di fase dell'acqua, semplificato. By Cmglee, in Wikimedia.

Si vedano ancora per esempio le (veramente appropriate per l'argomento che trattiamo) figure 1a (*linear-log plot*) e 1b (*log-log plot*) in un articolo sui farmaci anti-HIV.

Grafici epidemici in scala logaritmica. Nella figura sottostante sono considerati tutti gli stati confinanti con l'Italia settentrionale (Francia, Svizzera, Austria, Slovenia) e in più quelli di una vastissima area, dal Friuli Venezia Giulia fino ai confini di Russia e Bielorussia.

BOZZA - DRAFT

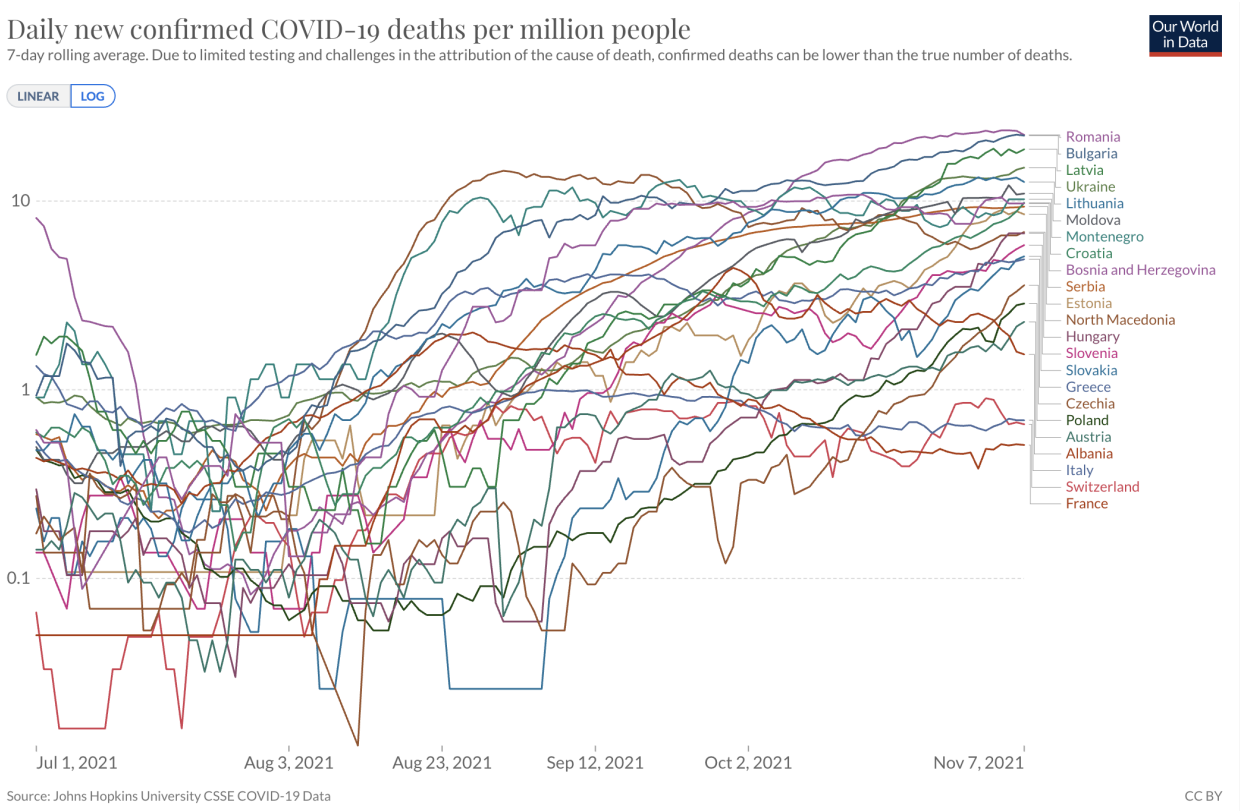


Figura 2: Decessi covid-19 giornalieri, media mobile a 7 giorni

In un normale diagramma cartesiano sarebbero praticamente indistin-

guibili i grafici di Italia, Francia e Svizzera, ben distinti nel log plot.
Questi 3 stati hanno mortalità covid giornaliera, all'inizio di novembre 2021, sotto l'1 per milione, gli altri stati considerati sopra 1 e alcuni di molto.
Come si verifica facilmente, i primi 3 stati considerati hanno avuto una drammatica prima ondata della pandemia nella primavera del 2020, mentre nessuno degli altri l'ha avuta, iniziando ad avere grandi numeri solo dopo l'estate 2020.

Grafici semilogaritmici concentrazione-tempo

In figura, un grafico semilogaritmico concentrazione-tempo di un farmaco con "cinetica del primo ordine" cioè con questa equazione, in cui C_0 è la concentrazione iniziale e r la costante di eliminazione:

$$C(t) = C_0\, \mathrm{e}^{-r\,t}$$

(in figura con $C_0 = 100$ mg/L ed emivita $t_{1/2} = 4$ ore)
L'asse dei tempi è lineare, l'asse (verticale) delle concentrazioni è logaritmico: ogni decade 1-10, 10-100... occupa tratto di ugual lunghezza.

BOZZA - DRAFT

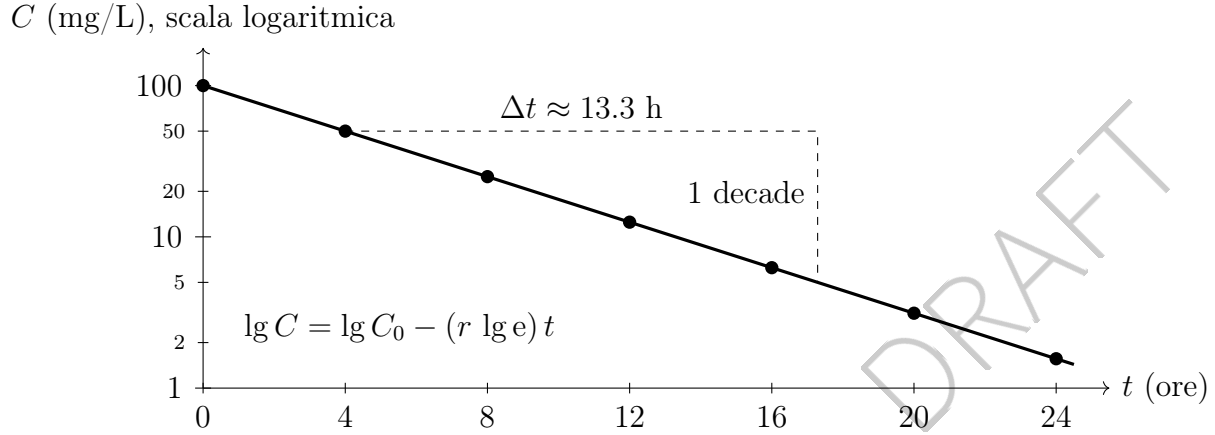


Figura 3: Grafico semilogaritmico concentrazione-tempo di un farmaco con cinetica del primo ordine. Prendendo il logaritmo decimale, $\lg C = \lg C_0 - (r \lg \mathrm{e})\, t$, che è l'equazione di una *retta* in t, con pendenza $m = -r \lg \mathrm{e} \approx -0.4343\, r$. Da un grafico di misure reali allineate si ricavano perciò: $r = -\dfrac{m}{\lg \mathrm{e}} \approx -2.303\, m$ e $t_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{r} = \dfrac{\lg 2}{|m|} \approx \dfrac{0.301}{|m|}$. Qui la concentrazione scende di una decade (da 50 a 5 mg/L) in $\Delta t \approx 13.3$ ore, quindi $m \approx -1/13.3 \approx -0.075$ h^{-1}, $r \approx 0.173$ h^{-1} e $t_{1/2} \approx 4$ ore. I pallini sono le concentrazioni dopo 0, 1, 2, …, 6 emivite (100, 50, 25, … mg/L): in scala logaritmica ogni dimezzamento è lo stesso gradino verticale, $\lg 2 \approx 0.3$. Se i punti misurati *non* stanno su una retta, la cinetica non è del primo ordine.

BOZZA - DRAFT

14.7 Logaritmi in Farmacia e nelle Scienze Applicate

I logaritmi hanno ricorrenza enorme nelle Scienze Applicate fra cui:

1) i diagrammi in scala logaritmica, sopra spiegati;
2) la clearance dei farmaci (Farmacocinetica);
3) La Curva di Preston (Epidemiologia);
4) il pH (Chimica Farmaceutica e in generale Chimica);
5) il decibel usato nella misurazione dell'udito in farmacia.

BOZZA - DRAFT

14.8 Cenni alla clearance dei farmaci

L'emivita è inversamente proporzionale alla clearance e direttamente proporzionale al volume di distribuzione (complessa questione di Farmacologia) con costante di proporzionalità $\ln 2 = 0.693\ldots$ che in Farmacia si approssima a 0.7 (e molti dettagli sono in Complementi):

$$t_{1/2} \approx \frac{0.7\, V_d}{Cl}$$

14.9 La curva di Preston

Questo è un argomento di Epidemiologia (e Demografia). L'aspettativa di vita alla nascita è uno dei principali indicatori di sviluppo di uno Stato (correlato anche a Medicina e Farmacia) insieme alla mortalità infantile (a un anno, e in subordine a 5 anni) e al reddito pro-capite.

Il primo e l'ultimo di questi indicatori, y e x, appaiono da molto tempo correlati a livello mondiale da questo modello empirico:

$$y = 6.6354 \log_{\mathrm{e}} x + 10.754 + error$$

con $error$ positivo o negativo ma di solito non grande, il cui grafico – tolto l'$error$ – si chiama *curva di Preston*.

Ecco la curva e lo scatterplot.

BOZZA - DRAFT

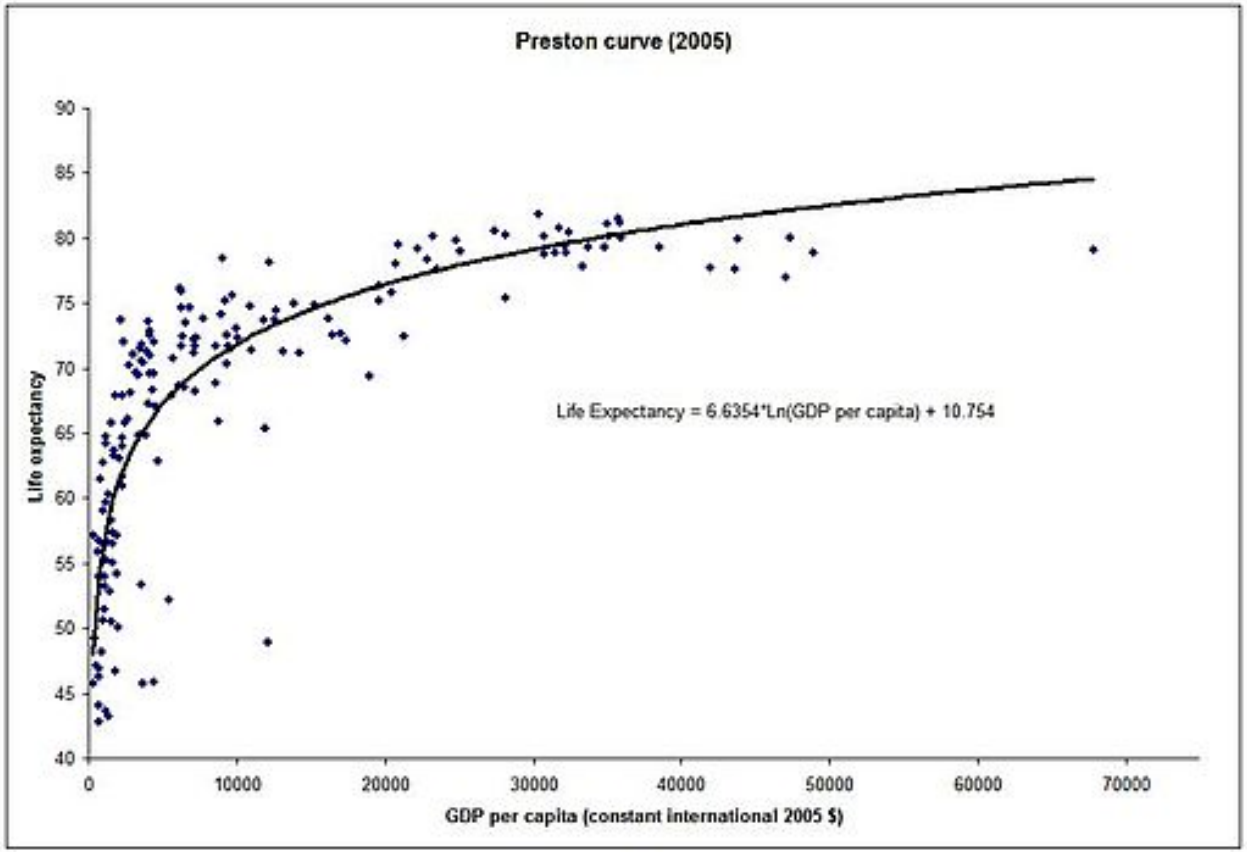


Figura 4: Curva di Preston. Da Wikimedia Commons.

Nota. Sebbene il diagramma illustri una correlazione e non dimostri – in senso stretto – una causalità, induce a riflettere: di quanto si può impoverire una comunità con lockdown e limitazioni ad attività commerciali, per prevenire una malattia che causa morte, senza causare un numero maggiore di morti per impoverimento?
Icasticamente e semplificatamente – senza nessuna pretesa di esattezza numerica – possiamo dire:

"LA FAMIGLIA BENESTANTE IMPOVERITA RINUNCIA A METÀ DELLE AUTOMOBILI, LA FAMIGLIA POVERA IMPOVERITA A METÀ DEL CIBO, CHE A QUEL PUNTO POTREBBE NON BASTARE PER SOPRAVVIVERE."

Di fatto, dall'inizio del covid sono emersi aumenti di mortalità enormi, in vari Stati, solo in minor parte imputabili direttamente al covid. Bisognerà studiare attentamente le cause a cui sono dovuti: impoverimento, mancata cura di altre malattie, riduzione del movimento fisico... Ci sono varie ipotesi, e ognuna avrà il suo peso, positivo o

BOZZA DRAFT

negativo, da determinare scientificamente.

Limitandoci qua fortemente, anche per non farci il sangue troppo, troppo amaro, sulla gestione della pandemia del covid citiamo[3] comunque un editoriale del 2020 del British Medical Journal, una delle più importanti riviste mediche del mondo:

> "Science is being suppressed for political and financial gain. Covid-19 has unleashed state corruption on a grand scale, and it is harmful to public health. (...) When good science is suppressed, people die."

Naturalmente all'impoverimento di miliardi di persone ha corrisposto l'arricchimento di alcuni.

Dal punto di vista della Statistica, la pandemia – ovvero chi aveva il potere di indirizzo sulle comunità umane, non il virus *in persona* – ha *spostato* smisurate quantità di ricchezza da molti a certi pochi, in tempi prima inconcepibilmente

BOZZA DRAFT

[3] Covid-19: politicisation, "corruption," and suppression of science BMJ 2020; 371 doi: https://doi.org/10.1136/bmj.m4425 (Published 13 November 2020) Cite this as: BMJ 2020;371:m4425

rapidi.
Trascriviamo da Oxfam in
https://www.oxfamitalia.org/la-disuguaglianza-non-conosce-crisi/

> Nel biennio pandemico '20-'21 l'1% più ricco ha visto crescere il valore dei propri patrimoni di 26.000 miliardi di dollari, in termini reali, accaparrandosi il 63% dell'incremento complessivo della ricchezza netta globale (42.000 miliardi di dollari), quasi il doppio della quota (37%) andata al 99% più povero della popolazione mondiale.
> (...) Per la prima volta in 25 anni aumentano inoltre simultaneamente estrema ricchezza ed estrema povertà.

BOZZA - DRAFT

Mnemonico per il nome Preston

FATE **PRESTO**OOOOO...



Complementi

BOZZA - DRAFT

14.10 Complementi – Unicità degli esponenziali

In buona sostanza, esiste "solo una" funzione esponenziale, e tutte le altre si ottengono riscalando l'argomento. Per esempio la funzione 3^t, essendo t un tempo corrispondente ai mesi (senza unità di misura: numero puro), dà esattamente gli stessi valori della funzione 9^t con t misurato in bimestri (senza unità di misura: numero puro): la prima al mese 4 vale 81 come la seconda al bimestre 2, che è lo stesso tempo nella realtà sensibile.

BOZZA - DRAFT

14.11 Complementi – Clearance dei farmaci

La *clearance* Cl di un farmaco è il volume di plasma che l'organismo (soprattutto reni e fegato) "ripulisce" completamente dal farmaco nell'unità di tempo: si misura quindi in volume diviso tempo, per esempio L/h oppure mL/min. Il farmaco però non è soltanto nel plasma: si distribuisce in un volume (apparente) V_d, detto *volume di distribuzione*. La costante di eliminazione è allora il rapporto

$$r = \frac{Cl}{V_d}$$

(frazione del volume di distribuzione ripulita in un'unità di tempo).

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{r} = \frac{\ln 2 \cdot V_d}{Cl} \approx \frac{0.7\, V_d}{Cl}$$

Esempio. Con $V_d = 40$ L e $Cl = 7$ L/h si ha $r = 7/40 = 0.175$ h^{-1} e $t_{1/2} \approx 0.7 \cdot 40/7 = 4$ ore, proprio come nella figura 3.
Più grande è la clearance, più breve è l'emivita; più grande è il volume di distribuzione, più lunga è l'emivita.

Cl = litri di plasma ripuliti all'ora

$r = \frac{Cl}{V_d}$

$t_{1/2} \approx \frac{0.7\, V_d}{Cl}$

BOZZA - DRAFT

14.12 ESERCIZI SULLA LEZIONE 14

14.12.1 Esercizio risolto a – Equazione con exp

$_{\mu}\approx$ Risolvere l'equazione $x\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} = 1$.

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare lo standard della virgola decimale).

Dividiamo ambo i membri per uno stesso numero diverso da 0 (essendo il valore di un esponenziale)

$$x\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} = 1 \qquad \Big/ : \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \neq 0$$

$$x = \frac{1}{\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}} =$$

che è già la soluzione esatta (seppure non bene espressa) e poi per le proprietà delle potenze

$$x = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}} =$$

BOZZA - DRAFT

e già abbiamo la soluzione esatta ed espressa bene, che ora approssimeremo; per le proprietà delle potenze

$$= \left(\mathrm{e}^3\right)^{\frac{1}{2}} =$$

per le proprietà delle potenze e delle radici

$$= \sqrt{\mathrm{e}^3} = \sqrt{\mathrm{e} \cdot \mathrm{e} \cdot \mathrm{e}} \approx$$

ricordando il valore approssimato di e, e poi con la calcolatrice

$$\approx \sqrt{2.718 \cdot 2.718 \cdot 2.718} \approx \sqrt{20.079} \approx$$

$$\boxed{\approx 4.481}$$

ma senza voler azzardare tanti decimali (comunque giusti, come si può verificare con una buona calcolatrice o col computer) diciamo con maggior sicurezza, e comunque buona accuratezza,

$$\boxed{4.48}$$

BOZZA - DRAFT

Esercizio$_{\mu dispensa}$ (R) $\approx$ Quanto vale, con 2 decimali dopo la virgola, la media geometrica di pi greco e il numero di Nepero ovvero Eulero?

$$\boxed{2{,}92}$$

(È la radice quadrata del prodotto di $3{,}14$ e $2{,}718$. Con queste approssimazioni le calcolatrici danno $2{,}9213...$ che magari ci verrebbe la tentazione di approssimare con $2{,}921$ ma molto opportunamente il testo del quesito ci previene dal farlo chiedendo 2 decimali dopo la virgola: infatti la terza cifra decimale dopo la virgola in $2{,}921$ non è corretta relativamente al quesito posto (formulato per π ed e, non per loro valori approssimati). La cifra decimale corretta, terza dopo la virgola, sarebbe il 2 di $2{,}9222...$ – ma appunto non ci riguarda – e questo succede perché le classiche approssimazioni che si ritengono usualmente a memoria, $3{,}14$ e $2{,}718$, non sono i valori esatti di π ed e).

BOZZA - DRAFT

15 Esponenziali e logaritmi – II parte

15.1 Definizione del logaritmo

Nella formula seguente

– il 2023 può essere sostituito con qualunque numero positivo;

– il 7 può essere sostituito con qualunque numero positivo $\neq 1$;

la formula resta vera: e metà della teoria del logaritmo è spiegata.

$$2023 = 7^{\log_7 2023} = 7^{3,911\,967...}$$

BOZZA - DRAFT

Se interessa anche il valore numerico del logaritmo del nuovo numero nella nuova base, il $3,911\,967...$ andrà sostituito col nuovo valore numerico $\log_b a$ che si può trovare per esempio col computer.

Una terzina di ottonari:

Logaritmo ad esponente,
Se si mette, la sua base
Lui si mangia, evanescente.

$$2023 = 7^{\log_7 2023}$$

Il logaritmo in base b di x è l'esponente da dar a b per aver x

(Ma) dev'essere $x > 0$, e $0 < b \neq 1$.

(3)

BOZZA - DRAFT

In questo testo LOG indica un logaritmo in qualunque base.

E in una formula in cui compaiono più LOG è da intendersi che sono tutti in una stessa base.

BOZZA - DRAFT

15.2 Logaritmi naturali e decimali; esponenziale

Come anticipato, la funzione inversa dell'esponenziale in base b si chiama logaritmo in base b. Facciamo un passo indietro, verso l'algebra. Per introdurre i logaritmi algebricamente, possiamo vedere

$$\log_2 8 = 3 \qquad \text{come una } \textit{scrittura alternativa} \text{ di} \qquad 2^3 = 8.$$

Ecco due esempi scritti come implicazioni:

$$\log_2 8 = 3 \Leftarrow 2^3 = 8 \qquad \log_{10} 100 = 2 \Leftarrow 10^2 = 100.$$

Considereremo quasi solo 2 basi: di grande importanza applicativa per secoli, e ancor oggi usato in Chimica,

il *logaritmo decimale*, in base 10,

$\lg x$ *oppure* $\log_{10} x$ (ma purtroppo anche $\log x$),

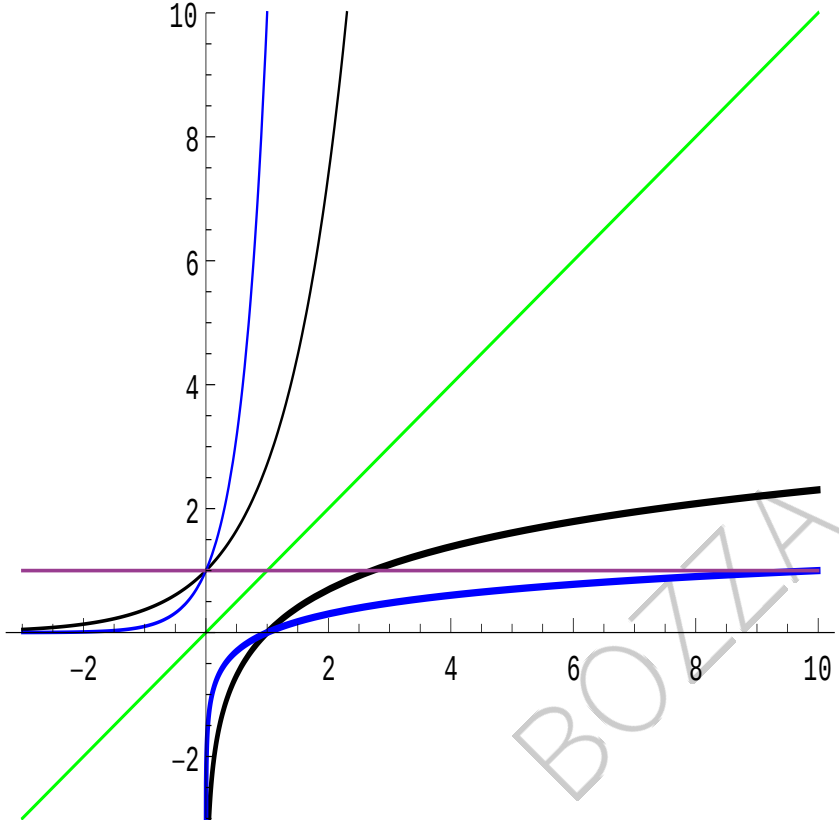
e il *logaritmo naturale*, in base e,

$\ln x$ *oppure* $\log_e x$ (ma purtroppo anche $\log x$).

Insomma la scrittura log x è ambigua e può riferirsi a logaritmi in base e e in base 10, e anche in altre basi. 😕

La base 10 è stata di grande importanza applicativa per secoli, e ancor oggi è usata in Chimica.
La base e è oggi preferita in Matematica e Fisica.

BOZZA - DRAFT



BOZZA - DRAFT

Figura 5: $\log_e x$ (**nero**), e^x (nero), $\log_{10} x$ (**blu**), 10^x (blu)

Ecco due valori che ci proponiamo di imparare a memoria:

$$\boxed{\lg 2 \approx \mathbf{0.3}} \tag{4}$$

O meglio ≈ 0.301. Il numero 0.3 ha errore (percentuale rispetto l'esatto) $< 0.5\%$.

$$\boxed{\lg \mathrm{e} \approx \mathbf{0.4343}} \tag{5}$$

Tutti i logaritmi in 1 valgono 0. I logaritmi in base $b > 1$ sono funzioni crescenti ("verso $+\infty$"), e in base $0 < b < 1$ decrescenti ("verso $-\infty$"). In ogni caso il crescere in valore assoluto avviene con straordinaria lentezza, per esempio $\log_{10} 1000 = 3$. I limiti in 0 sono rispettivamente $-\infty$ e $+\infty$. In ogni caso è $\log_b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.
(Per ogni possibile base b) il logaritmo in base b è una funzione biiettiva, e la sua inversa è la funzione esponenziale in base b, cioè b^x.

BOZZA - DRAFT

L'inversa del logaritmo naturale

$$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$

è la *funzione esponenziale*

$$\exp = \ln^{-1} \qquad \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

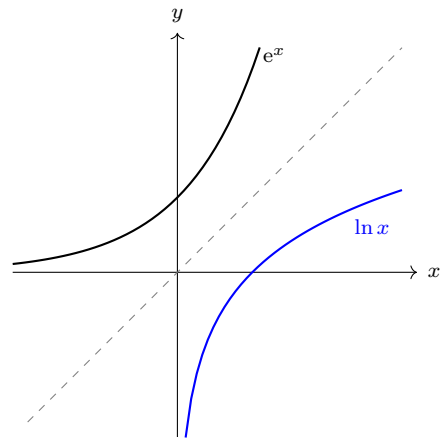
(e viceversa $\ln = \exp^{-1}$), ed è esattamente la funzione esponenziale di base e:

$$\exp x = \mathrm{e}^x.$$

Come per ogni funzione, si può ampliare il codominio a tutto $\mathbb{R}$:

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

(ma allora non è più suriettiva, e quindi non è più esattamente l'inversa di $\ln$).



simmetrici rispetto a $y = x$

Teorema. $\exp$ è esattamente la funzione esponenziale di base e:

$$\exp x = \mathrm{e}^x.$$

Questi $^{-1}$ denotano l'<u>inversa</u>, assolutamente non il reciproco.

BOZZA - DRAFT

(L'inversa di $\ln x$ come detto è $\exp x$, la reciproca di $\ln x$ è $\frac{1}{\ln x}$, una funzione completamente diversa, neanche definita per $x < 0$).

L'esponenziale in 0 vale 1, ed è crescente "verso $+\infty$" con grande rapidità, per esempio, $\exp(20)$ è più o meno mezzo miliardo.

Ripetiamo.
In tutta questa lezione col simbolo LOG intenderemo un logaritmo in qualunque base.
E ovviamente in una formula in cui compaiono più LOG è da intendersi che sono tutti in una stessa base.

BOZZA - DRAFT

15.3 “Trasforma prodotti in somme"

La proprietà fondamentale dei logaritmi:

$$\boxed{\mathsf{LOG}(x \cdot y) = \mathsf{LOG}(x) + \mathsf{LOG}(y)} \tag{6}$$

Per esempio

$\lg 2000 =$
$= \lg(2 \cdot 1000) =$
$= \lg 2 + \lg 1000 \approx$
$\approx 0.3 + 3 =$
$= 3.3$ (valore approssimato).

Un valore più preciso è 3.301.

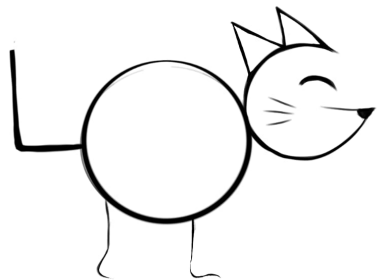
Con l'estrema lentezza della crescita del logaritmo, il logaritmo decimale di 2022 non si allontana molto: si trova infatti ≈ 3.306.

BOZZA - DRAFT

Il logaritmo
Vispo volpino LOG
Con un suo ritmo
Fa uno spuntino.

Un bel prodotto LOG(X•Y)
Vorace ingoia,
Poi che lo ha rotto,
Che il punto muoia. •
Proprio soccomba:
Lascia una tomba. +

E lui si sdoppia: LOG(X) + LOG(Y)
Forma una coppia.



15.4 “Trasforma divisioni in sottrazioni"

$$\boxed{\mathsf{LOG}\,(x/y) = \mathsf{LOG}(x) - \mathsf{LOG}(y)} \tag{7}$$

Per esempio

$\lg 5 =$
$= \lg \frac{10}{2} =$
$= \lg 10 - \lg 2 \approx$
$\approx 1 - 0.3 =$
$= 0.7$ (valore approssimato).

15.5 “Trasforma reciproco in opposto"

$$\boxed{\mathsf{LOG}\left(\frac{1}{y}\right) = -\mathsf{LOG}(y)} \tag{8}$$

che si ottiene dal caso del precedente con $x = 1$: $\mathsf{LOG}(1/y) = \mathsf{LOG}(1) - \mathsf{LOG}(y) = 0 - \mathsf{LOG}(y)$.

Per esempio

$\lg 0.5 =$
$= \lg \frac{1}{2} =$

BOZZA - DRAFT

$$= -\lg 2 \approx -0.3$$

Esempio. In Spettroscopia, l'*assorbanza* è[4] l'opposto del logaritmo decimale della *trasmittanza*, ovvero il logaritmo decimale del suo reciproco:

$$\alpha = -\lg \tau = \lg \frac{1}{\tau}$$

15.6 "Trasforma la radice ennesima in divisione per n"

$$\boxed{\mathsf{LOG}(\sqrt[n]{x}) = \tfrac{1}{n}\,\mathsf{LOG}(x)} \tag{9}$$

In particolare

"Trasforma l'estrazione di radice quadrata nel dimezzamento":

$$\boxed{\mathsf{LOG}(\sqrt{x}) = \tfrac{1}{2}\,\mathsf{LOG}(x)} \tag{10}$$

Per esempio

$$\lg \sqrt{10} = \frac{1}{2} \lg 10 = \frac{1}{2} \cdot 1 = 0.5$$

Osservando che $\sqrt{10} \approx 3.16 \approx \pi$ troviamo

$$\lg \pi \approx 0.5$$

[4] Si veda Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Trasmittanza*

BOZZA - DRAFT

e con la calcolatrice scientifica troviamo infatti ≈ 0.497.

15.7 "Trasforma l'elevare a potenza in moltiplicare"

Logaritmo della potenza.

"Tira giù gli esponenti"

$$\boxed{\mathsf{LOG}(x^{\alpha}) = \alpha\,\mathsf{LOG}(x)} \tag{11}$$

per ogni α e x per cui ha senso[5] la scrittura, e da quest'ultima discendono alcune delle precedenti proprietà, ponendo α uguale a -1 e poi $\frac{1}{n}$ e poi $\frac{1}{2}$.

Da quell'uguaglianza, con facili argomentazioni che comunque non facciamo, si trova che
"Tira giù l'esponente 2 e aggiunge il valore assoluto":

$$\boxed{\mathsf{LOG}(x^2) = 2\,\mathsf{LOG}(|x|)} \tag{12}$$

[5] Precisamente: $\forall\,\alpha \in \mathbb{R}, \forall\, x > 0$.

BOZZA - DRAFT

e più in generale per n intero

"Tira giù gli esponenti pari e aggiunge il valore assoluto":

$$\boxed{\mathsf{LOG}(x^{2\,n}) = 2\,n\,\mathsf{LOG}(|x|)}$$

Naturalmente anche senza valore assoluto le ultime 2 formule sono vere, ma col valore assoluto valgono anche per $x < 0$.

Come esempio della proprietà del logaritmo della potenza, considerando 1.024 vicino a 1, si ottiene:

$$\frac{1024}{1000} = 1.024$$
$$\frac{1024}{1000} \approx 1 \qquad \Big/ \lg$$
$$\lg\left(\frac{1024}{1000}\right) \approx \lg 1$$
$$\lg 1024 - \lg 1000 \approx 0$$
$$\lg 1024 \approx \lg 1000$$
$$\lg 2^{10} \approx \lg 10^3$$
$$10\,\lg 2 \approx 3$$
$$\lg 2 \approx \frac{3}{10}$$

che spiega l'approssimazione $\lg 2 \approx 0.3$ che ci siamo proposti di imparare a memoria.

BOZZA - DRAFT

15.8 Esempi di calcoli coi logaritmi

$$\lg 4 = \lg(2 \cdot 2) = \lg 2 + \lg 2 \approx 0.3 + 0.3 = 0.6$$

$$\lg 8 = \lg(2 \cdot 2 \cdot 2) = \lg 2 + \lg 2 + \lg 2 \approx 0.3 + 0.3 + 0.3 = 0.9$$

$$\lg 5 = \lg(10/2) = \lg 10 - \lg 2 \approx 1 - 0.3 = 0.7$$

ESERCIZIO$_{\mu 2021}$ $\approx$
Risolvere l'equazione

$$\lg \mathrm{e}^{2x} = 8$$

SVOLGIMENTO

$$\lg \mathrm{e}^{2x} = 8$$

$$2x \lg \mathrm{e} = 8 \quad / : 2 \lg \mathrm{e}$$

$$\Rightarrow x = \frac{8}{2 \lg \mathrm{e}} \approx \frac{8}{2 \cdot 0.4343} \approx$$

$$\boxed{\approx 9.21}$$

BOZZA - DRAFT

ESERCIZIO 2$_{\mu 2025}$ $*$ Essendo lb il logaritmo in base 2, risolvere l'equazione

$$\lg x - \lg \frac{1}{x} = \text{lb}8$$

SVOLGIMENTO

Per una proprietà del logaritmo (in qualunque base) del reciproco

$$\lg x - (-\lg x) = \text{lb}8$$

$$\lg x + \lg x = \text{lb}8$$

$$2 \lg x = \text{lb}8$$

$$\lg x = \frac{\text{lb}8}{2}$$

e il logaritmo di 8 in base 2 è l'esponente da dare a 2 per avere 8, cioè 3:

$$\lg x = \frac{3}{2} \qquad \Big/ 10^{\wedge}$$

$$x = 10^{\frac{3}{2}}$$

$$\boxed{10^{\frac{3}{2}}}$$

BOZZA - DRAFT

ovvero $\left(10^3\right)^{\frac{1}{2}}$ cioè

$$\boxed{\sqrt{1000}}$$

ovvero anche, scomponendo 1000 in $100 \cdot 10$,

$$\boxed{10\sqrt{10}}$$

BOZZA - DRAFT

15.9 Prevenire è meglio che curare: errori tipici

Questa formula già vista

$$\mathsf{LOG}(x \cdot y) = \mathsf{LOG}(x) + \mathsf{LOG}(y)$$

è vera ogni volta che ha senso (e cioè per x e y positivi) e riguarda il logaritmo del prodotto.
Errori tipici sono scambiare fra loro il $+$ col $\cdot$ e simili[6] cose.

[6] In generale la sequenza $\cdot$ $+$ della formula non si può sostituire con

15.10 Esempio di uso del logaritmo: il pH.

Il pH è una complessa questione chimica, per la quale si rinvia comunque ai testi specialistici. Qua vogliamo illustrarne qualche proprietà matematica.
Leggiamo su Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce pH:

> pH is defined as the decimal logarithm of the reciprocal of

---

$+ \cdot$
$\cdot \cdot$
$+ +.$

Detto altrimenti:

$$\mathrm{LOG}(x \cdot y) \equiv \mathrm{LOG}(x) + \mathrm{LOG}(y)$$

è un'identità, cioè un'uguaglianza sempre vera (per gli x e y per cui ha senso, cioè positivi) invece per esempio

$$\mathrm{LOG}(x + y) =^{EQ} \mathrm{LOG}(x) + \mathrm{LOG}(y)$$

è un'equazione, vera solo per particolari valori (x, y), per esempio $(2, 2)$:

$$\mathrm{LOG}(2 + 2) = \mathrm{LOG}(4) = \mathrm{LOG}(2^2) = 2\,\mathrm{LOG}(2) = \mathrm{LOG}(2) + \mathrm{LOG}(2).$$

Ma non succede certo con $(3, 3)$ o $(2, 3)$ o $(3, 2)$.

Ripetiamo la formulazione giusta:
logaritmo del prodotto = somma dei logaritmi. (Ovviamente, nella stessa base).

BOZZA - DRAFT

the hydrogen ion activity, a_{H+}, in a solution

$$\text{pH} = -\log_{10}(a_{H+}) = \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H+}}\right)$$

Se il pH diminuisce di 1 questo equivale al decuplicare di a_H+:

$$pH - 1 = \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H+}}\right) - 1 =$$

$$= \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H+}}\right) + (-1) =$$

$$= \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H+}}\right) + \log_{10}\frac{1}{10} =$$

$$= \log_{10}\left(\frac{1}{a_{H+}} \cdot \frac{1}{10}\right) =$$

$$= \log_{10}\left(\frac{1}{10\, a_{H+}}\right)$$

Così il suo diminuire di 2 corrisponde al centuplicare di a_{H+}.

BOZZA - DRAFT

Complementi

BOZZA - DRAFT

15.11 Complementi – Con riferimento alle varie basi

Come già detto

"Trasforma prodotti in somme":

formule per il *logaritmo del prodotto* ed *esponenziale della somma*)

$$\lg(x\,y) = \lg x + \lg y,\ \ \forall\, x, y > 0 \qquad 10^{x+y} = 10^x \cdot 10^y$$

$$\ln(x\,y) = \ln x + \ln y,\ \ \forall\, x, y > 0 \qquad \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y$$

$$\log_b(x\,y) = \log_b x + \log_b y,\ \ \forall\, x, y > 0 \qquad b^{x+y} = b^x \cdot b^y$$

Come già detto

"Trasforma divisioni in sottrazioni":
(formule per il *logaritmo del quoziente* ed *esponenziale della differenza*)

$$\lg(x/y) = \lg x - \lg y, \ \ \forall\, x, y > 0 \qquad\qquad 10^{x-y} = 10^x/10^y$$

$$\ln(x/y) = \ln x - \ln y, \ \ \forall\, x, y > 0 \qquad\qquad \mathrm{e}^{x-y} = \mathrm{e}^x/e^y$$

$$\log_b(x/y) = \log_b x - \log_b y, \ \ \forall\, x, y > 0 \qquad\qquad b^{x-y} = b^x/b^y\ .$$

Come già detto
"Tira giù gli esponenti":
(formule per il *logaritmo della potenza*)

$$(\forall\, \alpha \in \mathbb{R})(\forall\, x > 0)\ \lg x^\alpha = \alpha\ \lg x$$

$$(\forall\, \alpha \in \mathbb{R})(\forall\, x > 0)\ \ln x^\alpha = \alpha\ \ln x$$

$$(\forall\, \alpha \in \mathbb{R})(\forall\, x > 0)\ \log_b x^\alpha = \alpha\ \log_b x$$

e da quest'ultima discendono tutte le successive proprietà di questo paragrafo, ponendo α uguale a -1 e poi $\frac{1}{2}$ e poi $\frac{1}{n}$.

BOZZA - DRAFT

E per esponenti pari anche

$$(\forall\, n \in \mathbb{Z})(\forall\, x \neq 0)\ \lg x^{2\,n} = 2\,n\ \lg|x|$$

$$(\forall\, n \in \mathbb{Z})(\forall\, x \neq 0)\ \ln x^{2\,n} = 2\,n\ \ln|x|$$

$$(\forall\, n \in \mathbb{Z})(\forall\, x \neq 0)\ \log_b x^{2\,n} = 2\,n\ \log_b|x|$$

Come già detto

"Trasforma il passaggio al reciproco nel passaggio all'opposto:"

$$\lg\frac{1}{x} = -\lg x$$

$$\ln\frac{1}{x} = -\ln x$$

$$\log_b\frac{1}{x} = -\log_b x$$

Come già detto

"Trasforma l'estrazione di radice quadrata nel dimezzamento:"

$$\lg\sqrt{x} = \frac{1}{2}\lg x$$

BOZZA - DRAFT

$$\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$$

$$\log_b \sqrt{x} = \frac{1}{2} \log_b x$$

e questo si estende alle radici di qualunque indice:

$$\lg \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \lg x$$

$$\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \ln x$$

$$\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_b x \, .$$

BOZZA - DRAFT

15.12 Complementi – Altre proprietà

Dalle definizioni e proprietà dette, discendono subito le seguenti.

In questo paragrafo, b rappresenta qualunque numero reale che possa

essere base di un logaritmo, cioè

$$b > 0 \wedge b \neq 1 \, .$$

Un'attenta considerazione di quanto detto finora dà

$$(\forall x > 0, x \neq 1) \qquad \log_x x = 1$$

e queste 6:

"exp mangia log e log mangia exp"

$$\lg 10^x = x, \ \forall x \qquad 10^{\lg x} = x, \ \forall x > 0.$$

$$\ln \exp x = \ln \mathrm{e}^x = x, \ \forall x \qquad \exp \ln x = \mathrm{e}^{\ln x} = x, \ \forall x > 0$$

$$\log_b b^x = x, \ \forall x \qquad b^{\log_b x} = x, \ \forall x > 0.$$

Tutte le successive proprietà degli esponenziali ci sono già note dall'Algebra, e alcune proprietà dei logaritmi le abbiamo viste da poco;

BOZZA - DRAFT

altre sono nuove.

I logaritmi in 1 valgono 0 e gli esponenziali in 0 valgono 1:

$$\lg 1 = 0 \qquad 10^0 = 1$$

$$\ln 1 = 0 \qquad \mathrm{e}^0 = 1$$

$$\log_b 1 = 0 \qquad b^0 = 1$$

BOZZA - DRAFT

15.13 Complementi – Esempi di calcoli coi logaritmi

Esempi con le proprietà 1, 2 e 4 del logaritmo decimale.

$\lg 3 = \lg \sqrt[5]{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \lg \sqrt[5]{243} \approx$

sostituiamo approssimatamente 243 con 250

$$\approx \lg \sqrt[5]{250} = \frac{1}{5} \lg 250 = \frac{1}{5} \lg \frac{1000}{4} =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\lg 1\,000 - \lg 4\right) = \frac{3 - 0.6}{5} = 0.48$$

$\lg 6 = \lg(3 \cdot 2) = \lg 3 + \lg 2 \approx 0.48 + 0.3 = 0.78$

$\lg 9 = \lg(3 \cdot 3) = \lg 3 + \lg 3 \approx 0.48 + 0.48 \approx 0.96$ ☹

ma per eccesso di approssimazioni quest'ultimo fallisce sul secondo decimale, infatti troviamo con calcolatrice scientifica o WolframAlpha

$$\lg 9 \approx 0.95$$

Adesso abbiamo i logaritmi - in effetti approssimazioni in generale – dei numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; aggiungiamo

$\lg 0.1 = \lg \frac{1}{10} = -\lg 10 = -1$

e disegniamo un grafico!

$\lg 7 = \lg \sqrt{49} = \frac{1}{2} \lg 49 \approx$

sostituiamo approssimatamente 49 con 50

BOZZA - DRAFT

$$\approx \tfrac{1}{2}\lg 50 = \tfrac{1}{2}\,\lg(5\cdot 10) = \tfrac{1}{2}\,(\lg 5 + \lg 10) \approx \tfrac{1}{2}\,(0.7+1) \approx 0.85$$

(Ci mancano 3, 6 e 9, che vedremo; 1, 2 e 10, e ora 4, 5, 7, 8, li abbiamo: provate a disegnare un grafico e stimare così i 3 valori mancanti; poi verificherete le stime).

BOZZA - DRAFT

Esempio: calcolo del $\log_{10}(50\,000)/2$ dei prodotti omeopatici.
Leggiamo su Wikipedia (inglese)[7] alla voce *Homeopathic dilutions*:

> Several potency scales are in use (...) If a dilution is designated as q on the Q scale, and c on the C scale, c/q=$\log_{10}$(50,000)/2

cioè vale una sorta di formula di conversione fra scale

$$c = q \times \frac{\lg 50\,000}{2}$$

e ora vogliamo calcolare quel numero, col "nostro" $\lg 5 \approx 0.7$:

$$\frac{\lg 50\,000}{2} = \frac{\lg 5\cdot 10^4}{2} = \frac{\lg 5 + \lg 10^4}{2} \approx \frac{0.7+4}{2} = 2.35$$

[7] https://en.wikipedia.org/wiki/Homeopathic_dilutions

e infatti dice, e ora lo capiamo un po' meglio,

> A given dilution on the Q scale is roughly 2.35 times its designation on the C scale.

(La formula soprascritta c/q=$\log_{10}$(50,000)/2 si trova facilmente[8]).

Alcuni Autori e Produttori scrivono LM invece di Q (il significato inteso sarebbe 50 e 1000 in numeri romani, ma LM non significa $50\,000$ nei numeri romani). E alcuni purtroppo lm, mi-

[8] La formula viene da

$$100 \cdot ...(c\ volte)... \cdot 100 = 50\,000 \cdot ...(q\ volte)... \cdot 50\,000$$

$$100^c = 50\,000^q$$

$$(10^2)^c = 50\,000^q$$

$$10^{2\,c} = 50\,000^q \quad \Big/ \lg$$

$$2\,c \lg 10 = q \lg 50\,000$$

$$2\,c = q \lg 50\,000 \quad \Big/ \cdot \frac{1}{2\,q}$$

$$\frac{c}{q} = \frac{\lg 50\,000}{2}$$

dove la prima equazione rappresenta le diluizioni centesimali che avanzano di 100 volte in 100 volte sulla scala C, e le diluizioni cinquantamillesimali che avanzano di 50 000 volte in 50 000 volte sulla scala Q.

BOZZA - DRAFT

nuscolo, con difficile interpretazione della elle minuscola iniziale (sul web dove si vendono tali prodotti, pare una i maiuscola).

La formula di conversione si riferisce solo alla *teorica* diluizione *in base al modello* usato, e darebbe per esempio l'equivalenza di 20 Q con 47 C ovvero CH, ma i due preparati sono stati ottenuti con procedura diversa e non vengono considerati equivalenti dal punto di vista terapeutico.

BOZZA - DRAFT

15.14 ESERCIZI SULLA LEZIONE 15

ESERCIZIO$_{\mu 2019}$

Consideriamo il pH della Chimica:

$$-\log_{10} y$$

dove y viene spesso scritto $[H^+]$ e letto *"concentrazione degli H^+"*, ma tutto ciò richiederebbe precisazioni di Chimica di cui qua non ci occupiamo.
A cosa corrisponde la diminuzione di 0,5 nel pH? Con grossolana approssimazione, si esprima infine la soluzione a parole, come "circa dimezzare y" o "circa decuplicare y" o analoghi.

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard della virgola decimale. (Già nel quesito).

$$-\log_{10} y - 0{,}5 =$$

ricordando che $x \equiv \log_b b^x$

$$= -\log_{10} y - \log_{10} 10^{0,5} =$$

BOZZA - DRAFT

e osservando che $0{,}5 = \frac{1}{2}$ e ricordando che $y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$

$$= -\log_{10} y - \log_{10} \sqrt{10} =$$

per algebra delle parentesi

$$= -\Big(\log_{10} y + \log_{10} \sqrt{10} \Big) =$$

per la proprietà del logaritmo del prodotto

$$= -\log_{10} \Big(y \cdot \sqrt{10} \Big)$$

cioè a dire, y viene moltiplicata per $\sqrt{10} \approx 3{,}16$, e con grossolana approssimazione, come richiesto,

circa triplicare y

BOZZA - DRAFT

16 Esponenziali e logaritmi – III parte

16.1 Conversioni fra logaritmi naturali e decimali

$$\boxed{\lg x \approx 0.4343 \ln x} \tag{13}$$

Cioè il logaritmo decimale è *vagamente*[9] la metà del naturale e con maggior precisione il 43% e ancor meglio 43.43%).

BOZZA - DRAFT

[9] Questa formula e la sua inversa

$$\ln x \approx \frac{\lg x}{0.4343}$$

hanno circa $\frac{1}{79\,000}$ di errore relativo.
Le formule esatte sono

$$\ln x = \frac{\lg x}{\lg \mathrm{e}} \qquad \lg x = (\lg \mathrm{e}) \ln x$$

Esempio$_\mu$

$$\ln 2 \approx \frac{\lg 2}{0.4343} \approx \frac{0.3}{0.4343} \approx 0.69$$

costante spesso approssimata a 0.7 in Farmacologia nella trattazione dell'emivita dei farmaci, come vedremo in un paragrafo successivo.

16.2 Calcolo del valore di un logaritmo

Il logaritmo in base 2 di 8 è 3 perché 2^3 fa 8.
Con argomentazioni analoghe si calcolano a mente molti logaritmi.

Una buona calcolatrice scientifica calcola i logaritmi in base 10 e in base e.

Online con WolframAlpha con Log[$base$, $numero$] si calcolano i logaritmi in qualunque base.

BOZZA - DRAFT

16.3 Primo passo per il calcolo dei logaritmi

Dato un numero positivo x, lo si esprima in notazione scientifica

$$x = t \cdot 10^n \qquad 1 \leq t < 10$$

e allora vale

$$\lg x = \lg t + n \qquad 1 \leq t < 10 \tag{14}$$

e allora ci basta saper calcolare approssimatamente il logaritmo decimale dei numeri fra 1 e 10.

Per esempio

$$\lg 2026 = \lg(2.026 \cdot 10^3) = 3 + \lg 2.026$$

16.4 Calcolo approssimato dei logaritmi decimali dei numeri da 1 a 10

Considereremo 9 metodi:

BOZZA - DRAFT

1) con questa formula

$$\lg t \approx \frac{\sqrt{\sqrt{t}-1}}{\frac{\sqrt{\sqrt{t}}}{4}+0.33} \qquad 1 \le t < 10 \qquad errore^{(10)} < 1\% \tag{15}$$

per esempio con la sezione aurea viene $\lg \varphi \approx 0.209$ (si verifichi)

2) con artifici come quelli usati per i logaritmi di 3, 4, 5...

3) con una calcolatrice scientifica reale

4) con un'app di calcolatrice scientifica virtuale sul telefonino

5) online con WolframAlpha con `Log[`$base$`,`$numero$`]`

6) con le tavole cartacee (non sono affatto obsolete, anzi sono utili perché mostrano i valori intorno ad uno cercato, cosa che la calcolatrice non fa)

7) con le *logarithm tables* in rete (come sopra)

8) con altre approssimazioni[11]

BOZZA - DRAFT

[10] Errore percentuale rispetto l'esatto.

[11] Un'approssimazione calcolabile con le sole 4 operazioni e la radice quadrata è

$$\log_{10} x \approx (x^{1/256} - 1) \times 111$$

che su una calcolatrice che operi con almeno 7 cifre (decimali) significative dovrebbe avere non più di 0.004

9) con l'obsoleto *regolo calcolatore*. "gli astronauti (...) si servivano di regoli calcolatori (...) durante le missioni Apollo", da Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Regolo calcolatore*.

Per i logaritmi in altre basi si può calcolare il logaritmo decimale con le stesse formule (14) e (15) e poi usare la formula di cambiamento di base $\log_b x = \dfrac{\lg x}{\lg b}$.

Esercizio$_{\mu 2019}$
Di quanto aumenta il pH se la concentrazione degli H^+ diminuisce del 45%?

Svolgimento.
Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare quello della virgola decimale, a scelta).

BOZZA - DRAFT

---

di errore relativo (cioè 0.4%) e assoluto per $1.1 \le x \le 11$. Naturalmente $x^{1/256}$, si ottiene estraendo 8 volte consecutive la radice quadrata. Per i numeri $y < 1.1$ o $y > 11$, li si moltiplichi per un adeguato 10^m con $m \in \mathbb{Z}$ affinché l'ottenuto $y = 10^m x$ ricada in $[1.1, 11]$ e poi

$$\log_{10} y = \log_{10}(10^m x) = m + \log_{10} x$$

per esempio $\log_{10} 1265 = \log_{10} 1.265 + 3$.

Diminuire del 45% significa moltiplicare per 0.55:

$$\mathrm{pH}_{new} =$$

$$= \mathrm{pH}(y \cdot 0.55) = -\lg(y \cdot 0.55) = -\lg y - \lg 0.55 =$$

$$= \mathrm{pH}(y) - \lg(5.5 \cdot 10^{-1}) = \mathrm{pH}_{old} - (-1 + \lg 5.5) \approx$$

con la formula approssimata (15) di cui sopra

$$\approx \mathrm{pH}_{old} - (-1 + 0.745) = \mathrm{pH}_{old} - (-0.255) =$$

$$\approx \mathrm{pH}_{old} + 0.26$$

cioè

il pH aumenta di ≈ 0.26

(Con la calcolatrice ≈ 0.259637).

BOZZA - DRAFT

16.5 Risoluzione pratica delle equazioni con exp e log

Nella pratica le equazioni con esponenziali e logaritmi si possono risolvere abbastanza meccanicamente applicando di passaggio in passaggio regole formali, purché le equazioni siano sufficientemente semplici.
Ne vedremo adesso alcune.

Consideriamo un'equazione

$$A = B$$

in cui almeno 1 delle espressioni A e B contiene l'incognita, che chiameremo x, e almeno 1 delle 2 espressioni contenga logaritmi o esponenziali.

(1) – ***Calcolo effettivo del logaritmo*** con la sua definizione: *l'esponente da dare alla base per avere l'argomento*. Per esempio

$$2\,x - \log_4 64 = 0$$

BOZZA - DRAFT

$$\Rightarrow 2\,x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

(2) – ***Passaggio al logaritmo*** in base 10 oppure e oppure altra base, di entrambi i membri dell'equazione. Per esempio

$$2^{3\,x} = 8 \quad \Big/ \log_2$$

$$\log_2(2^{3\,x}) = \log_2 8$$

$$3\,x = 3$$

$$x = 1$$

(3) – ***Sostituzione approssimata di*** lg2 ***con 0,3***. Per esempio

$$10^x = 2 \quad \Big/ \lg$$

$$x = \lg 2$$

$$\Rightarrow x \approx 0{,}3 \quad (standard\,della\,virgola\,decimale)$$

BOZZA - DRAFT

(4) – ***Sostituzione approssimata di*** **lg e** ***con 0,4343***. Per esempio

$$10^x = \mathrm{e}$$

$$x = \lg \mathrm{e} \approx 0{,}4343 \quad (standard\ della\ virgola\ decimale)$$

(5) – ***Calcolo approssimato del logaritmo*** con uno dei metodi visti. Per esempio

$$10^x = 500 \quad \Big/ \lg$$

$$x = \lg 500$$

$$= \lg \frac{1000}{2} =$$

$$= \lg 1000 - \lg 2 =$$

$$= 3 - \lg 2 \approx$$

$$\approx 3 - 0.3$$

$$\Rightarrow x \approx 2{,}7 \quad (standard\ della\ virgola\ decimale)$$

BOZZA - DRAFT

Adesso vedremo su un esempio altri 6 possibili passaggi.

Consideriamo questa equazione:

$$2\,(x^2{+}1)\,\ln(2\,x)^2{+}(x^2{+}1)\,\lg x^4{+}x\,\ln\frac{1}{|x|}{+}\frac{2}{3}\,\ln|x|^x{+}x\,\ln\sqrt[3]{|x|}=0 \tag{16}$$

Ecco ora altri 6 possibili passaggi formali fattibili, da scegliere accuratamente.

(6) – ***Logaritmo di una radice***

$$2\,(x^2{+}1)\,\ln(2\,x)^2{+}(x^2{+}1)\,\lg x^4{+}x\,\ln\frac{1}{|x|}{+}\frac{2}{3}\,\ln|x|^x{+}x{\cdot}\frac{1}{3}\,\ln|x|=0$$

BOZZA - DRAFT

(7) – ***Logaritmo del reciproco***[(12)]

$$2\,(x^2{+}1)\,\ln(2\,x)^2{+}(x^2{+}1)\,\lg x^4{-}x\,\ln|x|{+}\frac{2}{3}\,\ln|x|^x{+}x{\cdot}\frac{1}{3}\,\ln|x|=0$$

(8) – ***"Tirare giù gli esponenti e se pari mettere il valore assoluto"***:

$$2{\cdot}(x^2{+}1){\cdot}2{\cdot}\ln|2\,x|{+}(x^2{+}1){\cdot}4{\cdot}\lg|x|{-}x\,\ln|x|{+}\frac{2}{3}{\cdot}x\,\ln|x|{+}x{\cdot}\frac{1}{3}\,\ln|x|=0$$

e gli ultimi 3 addendi si elidono, e poi, con passaggio algebrico,

$$4\,(x^2+1)\,\ln|2\,x|+4\,(x^2+1)\,\lg|x|=0 \quad \Big/ : (4\,(x^2+1)) \neq 0$$

$$\ln|2\,x|+\lg|x|=0 \;\; (segue\ un\ passaggio\ algebrico)$$

$$\ln(|2|\cdot|x|)+\lg|x|=0 \;\; (segue\ un\ passaggio\ algebrico)$$

[12]Si potrebbe dire il passaggio del logaritmo del reciproco, non è necessario perché può essere sostituito dall'applicazione di (1) e (9):

$$\mathrm{LOG}\frac{1}{z} =^{(9)} \mathrm{LOG}(1)-\mathrm{LOG}(z) =^{(1)} 0-\mathrm{LOG}(z) = -\mathrm{LOG}(z)$$

BOZZA - DRAFT

$$\Rightarrow \ln(2\,|x|) + \lg|x| = 0 \tag{17}$$

(9) – ***Passare dalla base e a 10 o viceversa***, approssimatamente con la $\lg a \approx 0{,}4343 \ln x$ (oppure esattamente con la $\lg a = (\lg \mathrm{e}) \ln a$, che comunque non ci proponiamo di imparare a memoria):

$$\Rightarrow \ln(2\,|x|) + (\lg \mathrm{e}) \ln|x| = 0 \tag{18}$$

(10) – ***Logaritmo del prodotto***:

$$\Rightarrow \ln 2 + \ln|x| + (\lg \mathrm{e}) \ln|x| = 0 \tag{19}$$

$$\ln 2 + \ln|x| + (\lg e) \ln|x| = 0 \quad \Big/ + (-\ln 2) \quad (passaggio\, algebrico)$$

$$\ln|x| + (\lg \mathrm{e}) \ln|x| = -\ln 2 \quad (segue\ un\ passaggio\ algebrico)$$

$$(1 + \lg e) \ln|x| = -\ln 2 \quad \Big/ : (1 + \lg \mathrm{e}) \neq 0 \quad (passaggio\, algebrico)$$

$$\ln|x| = \frac{-\ln 2}{1 + \lg \mathrm{e}} \tag{20}$$

BOZZA - DRAFT

(11) – ***Esponenziazione*** in base 10 oppure e oppure altra base:

$$\ln|x| = \frac{-\ln 2}{1+\lg \mathrm{e}} \quad \Big/ \exp$$

$$|x| = \exp\left(\frac{-\ln 2}{1+\lg \mathrm{e}}\right) \quad (segue\ un\ passaggio\ algebrico)$$

$$\boxed{x = \pm \exp\left(\frac{-\ln 2}{1+\lg e}\right)}$$

Altre 4 possibili tecniche risolutive
che comunque non ci proponiamo di imparare a memoria

BOZZA - DRAFT

(12) **Formule di cambiamento di base**

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b} \quad \text{(13) (14) in particolare} \quad = \frac{\lg x}{\lg b} = \frac{\ln x}{\ln b}$$

da cui $\ln x = \frac{\lg x}{\lg \mathrm{e}}$ e con la (5) si ottiene la formula approssimata vista per la conversione fra logaritmi naturali e decimali.

(13) – ***"Unicità dell'intersezione dei grafici di*** a^t ***e*** b^t ***"***.

$$(\forall\, a > 0,\, b > 0,\, a \neq b) \qquad a^t = b^t \quad \Rightarrow \quad t = 0$$

Per esempio:

$$\mathrm{e}^{x^3} = 10^{x^3}$$
$$x^3 = 0$$
$$x = 0$$

(14) – ***"Unicità dell'intersezione dei grafici di*** $\log_a t$ ***e*** $\log_b t$ ***"***.

$$(\forall\, a > 0,\, b > 0,\, a \neq 1,\, b \neq 1,\, a \neq b) \qquad \log_a t = \log_b t \quad \Rightarrow \quad t = 1$$

[13] Anche $= (\log_c x) \cdot (\log_b c)$.

[14] Per il lettore interessato, si ricavano subito anche $\log_b x = \frac{1}{\log_x b}$, e $\log_{1/b} x = -\log_b x$.

BOZZA - DRAFT

(15) **Una formula di apparenza sorprendente** che raramente si trova:

$$x^{\mathsf{LOG}(y)} = y^{\mathsf{LOG}(x)} \qquad \forall\, x, y > 0$$

in particolare per il logaritmo naturale

$$\boxed{x^{\ln y} = y^{\ln x} \qquad \forall\, x, y > 0}$$

(che si dimostra – sostanzialmente – applicando ad ambo i membri il logaritmo nella base considerata; e si veda che WolframAlpha la dichiara `True`).

BOZZA - DRAFT

Bottom line. *I passaggi visti sono sufficienti per risolvere molte equazioni con esponenziali e logaritmi, unitamente all'algebra:*

– calcolo (a mano o con la calcolatrice o in altri modi) e proprietà delle 4 operazioni e del valore assoluto e del fattoriale e delle radici e delle potenze;

– sostituzione (coi loro valori approssimati) delle costanti conosciute (in forma approssimata) a memoria, come e, π, eccetera.

Ovviamente tutto ciò non basta per risolvere tutte le equazioni con gli esponenziali e/o i logaritmi: per esempio non la $\mathrm{e}^x = x + 1$, che comunque ovviamente ha unica soluzione $x = 0$. (Si disegnino i 2 grafici, di $f(x) := \mathrm{e}^x$ e di $g(x) := x+1$).

Ma si veda ancora il paragrafo seguente per una possibile problematica.

16.6 Soluzioni spurie ovvero fittizie

In qualche equazione coi logaritmi per così dire "capricciosa" può capitare che qualche passaggio incauto introduca soluzioni spurie ovvero fittizie, che assolutamente non sono soluzioni ma sembrano esserlo. Al livello di questa trattazione elementare non è possibile dare un metodo generale per evitare sempre e comunque le soluzioni fittizie.

Per esempio con questi passaggi

$$\lg x + \lg(2\,x) = 0$$

BOZZA - DRAFT

$$\lg(x \cdot 2 \cdot x) = 0$$

$$\lg(2\,x^2) = 0 \quad \Rightarrow 2\,x^2 = 1 \quad \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

troviamo una soluzione spuria ovvero fittizia negativa che assolutamente non è soluzione dell'equazione iniziale perché $\lg$ non esiste per argomenti negativi.

Al limite estremo, in un'equazione particolarmente capricciosa anche la banale sostituzione di lg2 con l'approssimazione 0,3 potrebbe introdurre soluzioni fittizie, o di π con 3,14.

Molta parte della problematica si può evitare verificando se le soluzioni trovate verificano l'equazione iniziale, ed eventualmente quindi escludendone qualcuna.

Oppure – e può essere meno facile – trovando il dominio dell'equazione, ed escludendo le eventuali soluzioni al di fuori del dominio.

BOZZA - DRAFT

* Complementi *

BOZZA-DRAFT

16.7 Equazioni e disequazioni con exp e log – teoria

L'esponenziale in ogni base positiva diversa da 1 è iniettivo e allora si può applicarlo ad ambo i membri di un'equazione ottenendo un'equazione *equivalente*, cioè con le stesse (eventualmente esistenti) soluzioni:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 10^{f(x)} = 10^{g(x)}$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{f(x)} = \mathrm{e}^{g(x)}$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow b^{f(x)} = b^{g(x)} \qquad \forall\, b > 0,\, b \neq 1$$

Si può anche applicare l'esponenziale in base b positivo diverso da 1 a tutti e 4 i tipi di disuguaglianza e l'ordinamento si conserva se e solo

se $b > 1$, che è il caso di maggior interesse:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow 10^{f(x)} > 10^{g(x)}$$

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{f(x)} > \mathrm{e}^{g(x)}$$

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow b^{f(x)} > b^{g(x)} \qquad \forall\, b > 1$$

e tutte similmente con $<$, $\geq$, $\leq$.

Il logaritmo è iniettivo e definito per ogni numero positivo e allora

$$0 < f(x) = g(x) \Leftrightarrow \lg f(x) = \lg g(x)$$

$$0 < f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln g(x)$$

$$0 < f(x) = g(x) \Leftrightarrow \log_b f(x) = \log_b g(x)$$

cioè si può applicare il logaritmo in qualunque base ad ambo i membri di un'equazione $f(x) = g(x)$ ottenendo un'equazione *equivalente*, cioè con le stesse (eventualmente esistenti) soluzioni, se $f(x) > 0$

BOZZA - DRAFT

nel suo dominio, oppure $g(x) > 0$ nel suo dominio (è equivalente), in particolare se una delle 2 funzioni è un esponenziale in qualche base eventualmente moltiplicato per una costante positiva, che è il caso più comune nella pratica.

Di più: il logaritmo decimale e quello naturale e ogni logaritmo in base $b > 1$ sono crescenti[15] e allora si può applicarli conservando l'ordinamento:

$$0 < f(x) \leq g(x) \;\Leftrightarrow\; \lg f(x) \leq \lg g(x) \quad e\, anche\, con \quad <$$

$$0 < f(x) \leq g(x) \;\Leftrightarrow\; \ln f(x) \leq \ln g(x) \quad e\, anche\, con \quad <$$

$$\forall\, b > 1 \quad 0 < f(x) \leq g(x) \;\Leftrightarrow\; \log_b f(x) \leq \log_b g(x) \;\; e\, anche\, con \;\; <$$

BOZZA - DRAFT

[15] Invece coi logaritmi in base minore di 1 si inverte l'ordinamento:

$$(\forall\, b,\, 0 < b < 1) \quad 0 < f(x) < g(x) \;\Leftrightarrow\; \log f(x) > \log g(x)$$

$$(\forall\, b,\, 0 < b < 1) \quad 0 < f(x) \leq g(x) \;\Leftrightarrow\; \log f(x) \geq \log g(x)\,.$$

16.8 L'esponenziale e la campana gaussiana

Nelle Scienze Applicate un'infinità di fenomeni vengono bene modellizzati da funzioni con grafico più o meno a campana.

Talvolta queste campane sono simmetriche, o almeno più o meno simmetriche, altre volte sono lontane dalla simmetria.

Occupiamoci adesso solo delle campane simmetriche.

La più "pura" delle campane simmetriche, diciamo il modello ideale in qualche modo, è la campana gaussiana, che ha un'equazione basata sull'esponenziale

$$y = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\,\pi}}$$

chiamata *densità normale standard*.
Ha asse di simmetria $x = 0$, cioè l'asse y, e l'asse di simmetria può

BOZZA - DRAFT

venir spostato in $x = m$ qualsiasi, con l'equazione

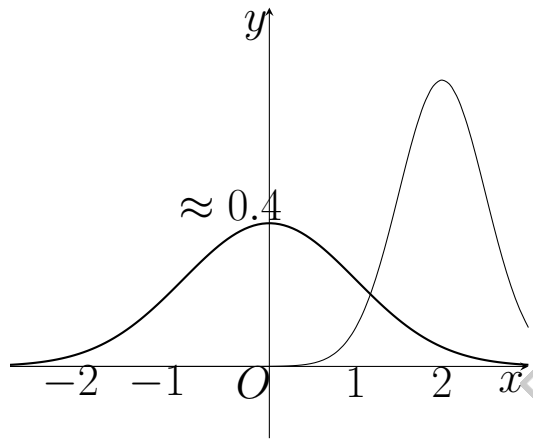
$$y = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2}}}{\sqrt{2\,\pi}}$$

ma avvertiamo il Lettore che invece della lettera m di solito si usa la corrispondente lettera greca μ.
Può essere resa più o meno ribassata ovvero "ripida" con un ulteriore parametro $\sigma > 0$ ottenendosi l'equazione generale

$$y = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}$$

chiamata *densità normale di parametri* μ *e* σ.

BOZZA - DRAFT



– Densità normale di parametri $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ ovvero densità normale standard

– densità normale di parametri $\mu = 2$ e $\sigma = 0.5$

Grafici di questo genere si otterranno, fra l'altro, con le altezze, e le glicemie, colesterolemie, sideremie... degli Italiani.
E non solo degli italiani: anche degli europei, e anche solo degli Studenti di Farmacia.

Curve a campana alquanto asimmetriche modellizzano bene il nume-

BOZZA - DRAFT

ro di morti (o casi o terapie intensive...) giornaliero (o settimanale o anche mensile) delle ondate epidemiche.
Equazioni per modellizzarle sono ancora basate sull'esponenziale.

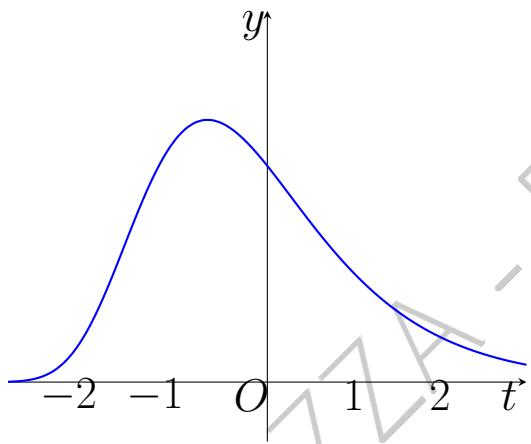


Grafico di

$$12\,\mathrm{e}^{-x-0.5\,\mathrm{e}^{-x}}$$

Il tempo t potrebbe essere in mesi, e lo 0 all'ultimo giorno di un certo anno.

BOZZA - DRAFT

16.9 Funzione di Gompertz

Si chiama funzione di Gompertz ogni funzione della famiglia (insieme) di funzioni

$$f(x) := a\,\mathrm{e}^{-b\,\mathrm{e}^{-c\,x}}$$

I grafici di queste funzioni sono sigmoidi. Si sono rivelate ottime per la modellizzazione delle epidemie: numero cumulativo dei morti, dei casi, eccetera.

16.10 Il logaritmo decimale come contatore di zeri

Logaritmi decimali delle potenze di 10:

-3 0.001 tre zeri ma con punto decimale
-2 0.01
-1 0.1
0 1 zero zeri
1 10

BOZZA - DRAFT

2 100

3 1000 tre zeri

BOZZA - DRAFT

16.11 Ordine di grandezza di un numero positivo

L'ordine di grandezza è un concetto tanto utile nelle Scienze Applicate, quanto mal definito nelle stesse Scienze Applicate, come anche altre volte succede (per esempio con le cifre significative).
Qua facciamo una scelta definizionale.

Ci sono 2 questioni:
– definire l'ordine di grandezza di 1 numero positivo;
– dire quando 2 numeri positivi hanno LO STESSO ordine di grandezza.

Per la seconda questione, l'uso generale è dire che 2 numeri positivi hanno LO STESSO ordine di grandezza se il rapporto del più grande e il più piccolo sta fra 1 e 10. (Non si dichiara quale sia l'ordine di grandezza, si dice solo che è lo stesso).
(Ma, dopo che avremo definito l'ordine di grandezza, numeri con rap-

BOZZA - DRAFT

porto 2 o anche 1.1 potranno non avere UGUALE ordine di grandezza, per esempio 95 e 103 ☹ comunque la consolazione è che i 2 ordini di grandezza non distano mai più di 1).

Come abbiamo già detto, ogni numero positivo x ammette una scrittura

$$x = a \cdot 10^n$$

con $1 \leq a < 10$ e n intero: ...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...
Adesso chiamiamo n ordine di grandezza di x e aggiungiamo:

$$\boxed{\textbf{ordine di grandezza } \text{di } x: \quad n := \lfloor \lg x \rfloor} \tag{21}$$

cioè

$$ordine\ di\ grandezza\ di\ x\ =\ parte\ intera\ di\ \lg x$$

Ma altri Autori definiscono con condizioni su a diverse da $1 \leq a < 10$. (Wikipedia in inglese ne dà altre 2).
Qualunque definizione – ragionevole – di ordine di grandezza si usi per 2 numeri positivi

BOZZA - DRAFT

se hanno ugual ordine di grandezza
il massimo non supera il decuplo del minimo

cioè sono simili almeno molto molto vagamente, e

se hanno ordini di grandezza m e $m+1$
il massimo non supera il centuplo del minimo
(ma in generale sarà molto molto vagamente il decuplo)

BOZZA - DRAFT

5 è l'ordine di grandezza del numero di capelli di una persona

11 è l'ordine di grandezza del numero di neuroni di un uomo

11 è l'ordine di grandezza del numero di stelle della Via Lattea

13 è l'ordine di grandezza del numero di globuli rossi di un uomo (3.0×10^{13})

Quindi il numero di globuli rossi di un uomo è molto vagamente il centuplo dei suoi neuroni (2 ordini di grandezza di differenza) e del numero di stelle della Via Lattea.

L'ordine di grandezza è molto usato nelle Scienze applicate per fissare

le idee sulla grandezza approssimativa di un numero, per agili confronti, semplificandolo all'estremo in un singolo numero intero, spesso fra -20 e 20 (e quasi sempre fra -30 e 30).
Ma la grossolanità dell'approssimazione è mostrata dal fatto che

9 è l'ordine di grandezza del numero di persone del mondo

come se fossero un miliardo e invece sono circa 8 miliardi.

Magari in novembre l'amministrazione dell'università non conosce ancora il numero esatto di quelli che saranno iscritti a Farmacia e Medicina ma può considerare plausibile che i secondi saranno in numero di un ordine di grandezza superiore ai primi.
Questo tipo di grossolanissime approssimazioni sono utilissime nella gestione pratica della realtà.

BOZZA - DRAFT

Orders of Magnitude in Biology

Fill in the blanks in the table using the information given.

Nanometre (nm)	1000000 x smaller than a millimetre
Micrometre (μm)	1000000 x smaller than a metre
Millimetre (mm)	1000 x smaller than a metre
Metre (m)	
Kilometre (km)	1000 x bigger than a metre

10^{2} = 10 x 10 This is the same as moving the decimal place one place to the right. 10.0 → 100.0

10^{3} = 10 x 10 x 10 This is the same as moving the decimal place two places to the right. 10.0 → 1000.0

10^{-1} = 1 ÷ 10 This is the same as moving the decimal place one place to the left. 1.0 → 0.1

10^{-4} = 1 ÷ 10 ÷ 10 ÷ 10 ÷ 10 This is the same as moving the decimal place four places to the left. 1.0 → 0.0001

Atom	DNA	Virus	Prokaryotic cell	Eukaryotic cell	Flea	Woodlouse	Peach	Child	Whale	Giant Redwood	School Drive
											
0.000000001m	0.00000001m	0.0000001m		0.00001-0.0001m			0.1m	1m	10m		
			10^{-5}m			10^{-2}m		1m	10m	10^{2}m	
		100nm		10-100μm	1mm		10cm	1m	10m		1km

Creative-Commons-CC-BY-SA image retrieved (2024) in

https://physics-fiction.fandom.com/wiki/Scale_%26_Magnitude_Order?file=Order_of_Magnitude.png

16.12 Il decadimento esponenziale, anche in Farmacia

Illustriamo una famiglia (insieme) di funzioni con l'esponenziale, che ricorre amplissimamente nelle Scienze Applicate, ed è espressa dai vari Autori in 2 modi diversi, con una costante negativa (che qua sarà k) oppure con una costante positiva (che qua sarà r) preceduta dal segno meno:

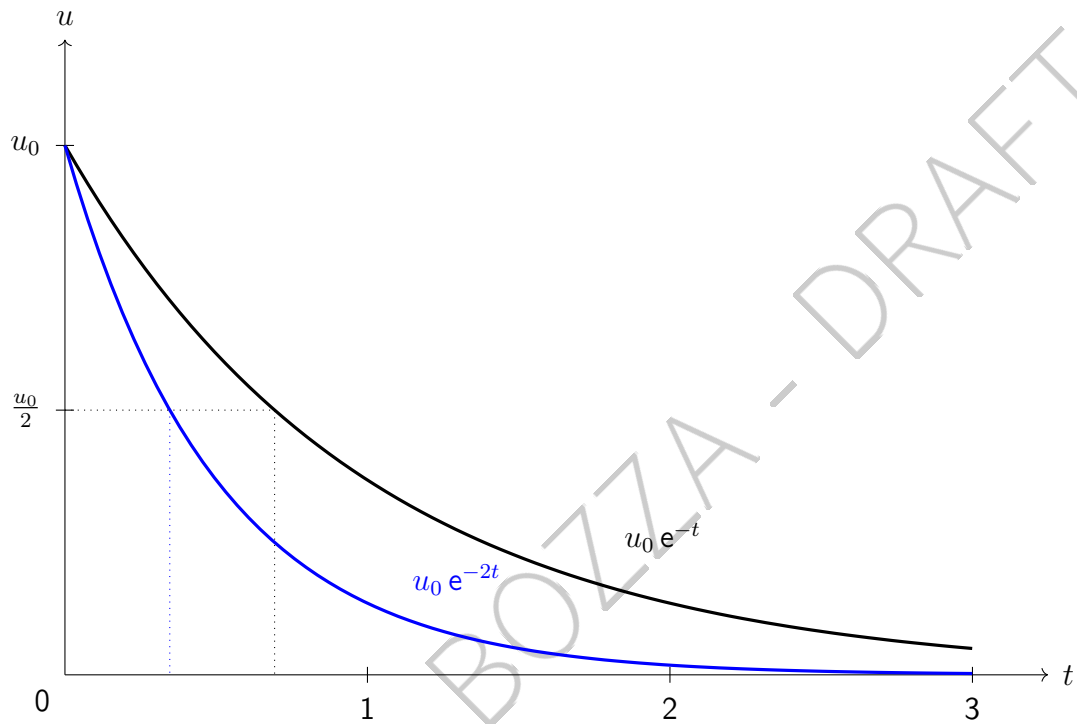
$$u(t) = u_0\,\mathrm{e}^{k\,t} \quad \text{essendo } u_0 = u(0) \qquad k < 0$$

$$\boxed{u(t) = u_0\,\mathrm{e}^{-r\,t} \quad \text{essendo } u_0 = u(0) \qquad r > 0} \tag{22}$$

e la costante k ovvero r dipende da caso a caso.
È l'equazione di un'infinità di fenomeni che si attenuano nel tempo: in Farmacia, soprattutto la concentrazione plasmatica di un farmaco dopo la somministrazione, che nella maggior parte dei casi diminuisce proprio così (si parla di *cinetica del primo ordine*), e allora r si chiama *costante di eliminazione*.
Più grande è r, più rapida è l'eliminazione: si veda la figura che segue.

BOZZA - DRAFT

16.13 Emivita di una sostanza nel sangue o nelle ossa



BOZZA - DRAFT

L'emivita $t_{1/2}$ di un farmaco o un veleno è[16] una quantità di tempo,

[16] La formula $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{r} \approx \frac{0.7}{r}$ collega $t_{1/2}$ alla costante di eliminazione r.

per esempio 3 minuti, che è un parametro *farmacocinetico*: indica il tempo richiesto per ridurre del 50% la concentrazione plasmatica[17] del farmaco o del veleno, cioè per dimezzarsi.

Dopo n emivite resta $(1/2)^n$ della concentrazione iniziale: dopo 1 emivita $\frac{1}{2}$, poi $\frac{1}{4}$, poi $\frac{1}{8}$, poi $\frac{1}{16}$, poi $\frac{1}{32}$...

Per curiosità[18] e senza qua dare garanzie, alcune emivite di farmaci: noradrenalina 2 minuti; morfina 2-3 ore; donepezil 3 giorni (70 ore); bedaquilina 165 giorni.
E l'emivita del piombo nelle ossa: 10 anni.

BOZZA - DRAFT

[17] È inversamente proporzionale alla sua clearance (Cl) e direttamente proporzionale al suo volume di distribuzione (V_d) secondo la formula

$$t_{1/2} = 0.7\frac{V_d}{Cl}$$

dove la costante 0,7 è in realtà un'approssimazione del logaritmo naturale di 2 (in effetti, più in particolare $\ln(2) = 0,69...$).

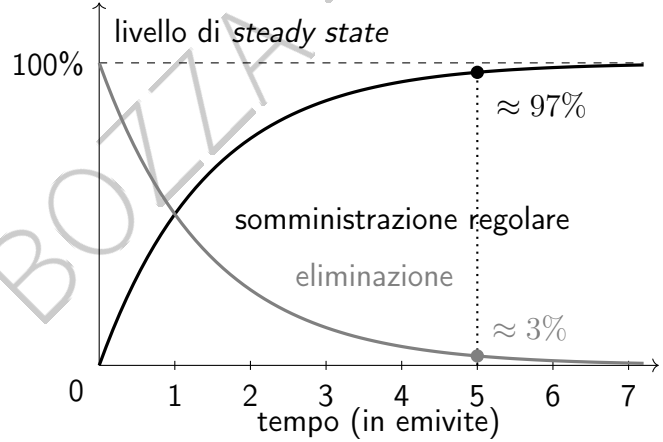
[18] https://en.wikipedia.org/wiki/Biological_half-life

16.14 Regola pratica su emivita e steady state

5 emivite:
resta $\approx 3\%$
steady state $\approx 97\%$

Dopo n emivite resta la frazione $(1/2)^n$ della quantità iniziale: dopo 5 emivite resta $1/32$, circa il 3%. È la regola pratica delle "5 emivite" per l'eliminazione (quasi) completa di un farmaco.
Analogamente avviene per lo *steady state* (stato stazionario): se il farmaco viene somministrato con regolarità (a dosi e intervalli costanti, o in infusione continua), la concentrazione sale verso un livello di equilibrio, in cui la quantità eliminata compensa quella somministrata.

Dopo n emivite si è raggiunta la frazione $1 - (1/2)^n$ di quel livello: dopo 5 emivite circa il 97%, cioè in pratica lo steady state.



BOZZA - DRAFT

16.15 L'intensità sonora, i logaritmi e i decibel

In farmacia misuriamo l'udito... capendo l'intensità sonora.

L'intensità sonora in decibel è definita con un logaritmo decimale, in dipendenza dall'energia sonora, e una serie di calcoli porta a concludere che

ad un raddoppio dell'energia corrisponde un aumento di ≈ 3 decibel (23)

Il 3 viene, coi calcoli, dallo 0.3 dell'approssimazione di lg2.

È lunica cosa che ci proponiamo di imparare di questo[19] argomento.

BOZZA - DRAFT

[19] Per il Lettore interessato: l'intensità sonora in decibel è definita sostanzialmente come

$$\text{intensità sonora} := 10\Big(\lg \frac{\text{energia passante in 1 s per 1 m}^2}{\text{una prefissata energia passante in 1 s per 1 m}^2}\Big)\, dB$$

dove la prefissata energia passante in 1 s per un m^2 è la (piccolissima) $1pW/m^2$.
(L'argomento dei logaritmi e degli esponenziali è sempre adimensionale, cioè un numero puro, senza unità di misura: non esiste il logaritmo di 3 metri o 4 secondi).
Allora come funzione dell'energia è del tipo

$$a \lg \frac{x}{c} \quad = a\,(\lg x - \lg c) \quad = a \lg x + d \quad (\text{con } d := -a \lg c)$$

(e si faccia ben attenzione a distinguere la soprastante scrittura dalla $a \lg(x+d)$). Il grafico è proprio come quello di $\lg x$, riscalato da a sull'asse delle ordinate e traslato verticalmente di d.

16.16 Complementi – Il piombo nelle ossa

Il piombo nelle ossa ha un'emivita – supponiamo esponenziale il suo scomparire, com'è ragionevole in questi casi – di (circa) 10 anni. In quanto tempo si riduce del 75%? E del 90%? E del 95%? E del 97%?

La riduzione <u>del</u> 75% è la riduzione <u>al</u> 25%, cioè ai $\frac{25}{100}$ ovvero $\frac{1}{4}$ e allora corrisponde a 2 dimezzamenti: allora ci vogliono 20 anni.
Per il 90% è meno immediato.

Calcoliamo di quanti decibel aumenta l'intensità sonora raddoppiando l'energia.

Detta E l'energia considerata e $2\,E$ il suo doppio, si ha

$$\text{intensità_sonora}(2E) - \text{intensità_sonora}(E) =$$

$$= 10\ \lg \frac{2\,E}{1pW/m^2} - 10\ \lg \frac{E}{1pW/m^2} =$$

ricordando che $\lg(x/y) = \lg x - \lg y$

$$= 10 \left(\lg(2\,E) - \lg E \right) = \quad (\text{mentre } \lg(1pW/m^2) \text{ si elide})$$

$$= 10\ \lg \frac{2\,E}{E} = 10\ \lg 2 \approx 10 \cdot 0.3 = 3$$

cioè quanto detto: ad un raddoppio dell'energia corrisponde un aumento di ≈ 3 decibel.

BOZZA - DRAFT

Illustriamo una famiglia (insieme) di funzioni con l'esponenziale, che ricorre amplissimamente nelle Scienze Applicate, ed è espressa dai vari Autori in 2 modi diversi, con una costante negativa (che qua sarà k) oppure con una costante positiva (che qua sarà r) preceduta dal segno meno:

$$u(t) = u_0\,\mathrm{e}^{k\,t} \quad \text{essendo } u_0 = u(0) \qquad k < 0$$

$$u(t) = u_0\,\mathrm{e}^{-r\,t} \quad \text{essendo } u_0 = u(0) \qquad r > 0$$

e la costante k ovvero r dipende da caso a caso.
Questa è l'equazione che esprime in funzione del tempo la concentrazione di piombo, che si attenua; e un'infinità di altri fenomeni.
Nella figura B, a destra, si vedono 4 casi, con diversi valori di u_0 e r:

(rosso) $\mathrm{e}^{-2\,x}$
(magenta) e^{-x}
(nero) $2\,\mathrm{e}^{-2\,x}$
(blu) $2\,\mathrm{e}^{-x}$

E in questo caso possiamo calcolare la costante r dall'emivita di 10

BOZZA - DRAFT

anni:

$$u(emivita) =^{DEF} \frac{u(0)}{2} =^{EQ} u(0)\,\mathrm{e}^{-r\,10\,anni} \quad \Big/ : u(0)$$

$$\frac{1}{2} = \mathrm{e}^{-r\,10\,anni} \quad \Big/ \ln$$

$$\ln\frac{1}{2} = -r\,10\,anni$$

$$-\ln 2 = -r\,10\,anni \quad \Big/ : (-10\,anni)$$

$$r = \frac{\ln 2}{10\,anni}$$

ottenendosi così l'equazione dello scomparire del piombo nelle ossa

$$u(t) = u_0\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}t} \text{ essendo } u_0 = u(0)$$

Ora ci si chiede quando sarà ridotto del 90% ovvero al 10%, cioè $u(t) = 0.1\,u(0)$:

$$0.1\,u(0) =^{EQ} = u(0)\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}t} \quad \Big/ : u(0)$$

BOZZA - DRAFT

$$0.1 = \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t} \quad \Big/ \lg$$

$$-1 = \lg \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t}$$

$$-1 = -\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t\,\lg \mathrm{e}$$

$$t = \frac{10\,anni}{\lg \mathrm{e} \cdot \ln 2} \approx \frac{10\,anni}{\lg \mathrm{e} \cdot \frac{\lg 2}{\lg \mathrm{e}}} = \frac{10\,anni}{\lg 2} \approx \frac{10\,anni}{0.3}$$

≈ 33.3 anni (valore che, nella pratica, possiamo stare sicuri che verrà riportato come 33 anni).

Si risolvano gli altri quesiti posti associatamente a questo appena risolto. Con 95% si dovrà calcolare $\lg 0.05 = \lg\left(\frac{1}{2} \cdot 0.1\right) = \lg \frac{1}{2} + \lg \frac{1}{10} = -\lg 2 - \lg 10 \approx -0.3 - 1 = -1.3$.

BOZZA - DRAFT

16.17 Complementi – Equazioni con LOG e x libera

Questione interessante è quella delle equazioni in cui compare un LOG(x) e anche una x fuori dai logaritmi. Per esempio per

$$1 - \lg x - x = 0$$

si può fare

$$1 - x = \lg x$$

e poi risolvere per via grafica il sistema

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ y = \lg x \end{cases}$$

Ma questo tipo di equazioni possono diventare più complicate, per esempio

$$2 - \lg x - x = 0$$

La risoluzione di quest'equazione richiede l'uso di una *funzione speciale dell'analisi matematica*.

BOZZA - DRAFT

Precisamente la funzione W di Lambert, e in casi più complessi nemmeno quella basta.

Su questa funzione lo scrivente ci ha passato un bel po' di vita, e si trovano in rete articoli scientifici cercando il cognome e Lambert e function.

BOZZA - DRAFT

16.18 Complementi – Fibonacci ed esponenziali

La successione di Fibonacci, che modellizza l'espansione almeno – nelle fasi iniziali – di una popolazione animale o microbica, e le epidemie, è sì definita per ricorrenza (e solo su $\mathbb{N}$) ma è approssimata con una funzione esponenziale in base φ, la sezione aurea:

$$a_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n \text{ per } n \text{ sufficientemente grande} \qquad (24)$$

per esempio $a_{10} = 55 \approx 55.0036$.
Dopo quanti mesi (se n indicia i mesi) la popolazione raggiunge il

valore $135\,301\,852\,344\,706\,746\,049$, oppure anzi, uscendo dall'esattezza ideale del problema, un valore $1.35 \cdot 10^{20}$?

Abbiamo l'equazione approssimata

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\,\varphi^n \approx 1.35 \cdot 10^{20} \qquad / \lg$$

$$\lg \frac{1}{\sqrt{5}} + n\,\lg \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx \lg(1.35 \cdot 10^{20}) \qquad \Big/ + \lg\sqrt{5}$$

$$n\,\lg \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx \lg(1.35 \cdot 10^{20}) + \lg\sqrt{5} \qquad \Big/ : \lg \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\approx \frac{\lg(1.35 \cdot 10^{20}) + \lg\sqrt{5}}{\lg \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$\approx \frac{\lg(1.35 \cdot 10^{20}) + \lg 2.23607}{\lg 1.61803}$$

e insomma ci servono i valori (approssimati) dei logaritmi decimali di 3 numeri (fra 1 e 10).

BOZZA - DRAFT

Con l'approssimazione prima vista si ha

$$\approx \frac{20 + 0.130 + 0.35054}{0.2089} \approx 98.04$$

e calcolando con pazienza si troverà che il 98-esimo numero di Fibonacci è proprio $135\,301\,852\,344\,706\,746\,049$. (Oppure con WolframAlpha: `Fibonacci[98]`).

Nella figura a sinistra si vedono:

(blu) la successione (n, a_n) essendo a_n la successione di Fibonacci
(verde) $\frac{1}{\sqrt{5}}\,\varphi^x$
(magenta) e^x
(nero) 10^x

BOZZA - DRAFT

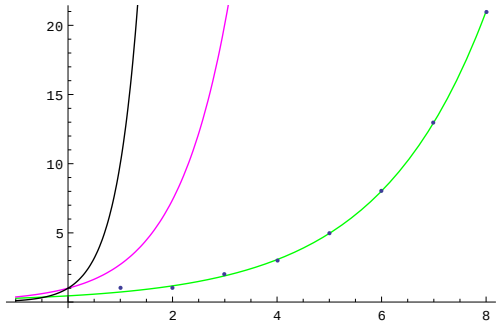


Figura A

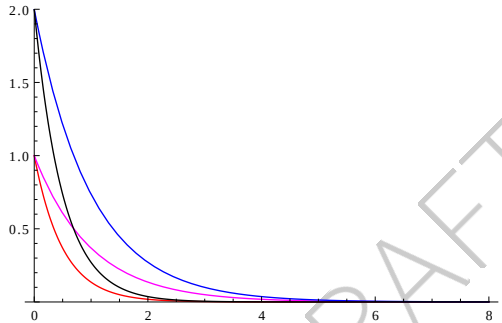


Figura B

Nella figura B, a destra, si vedono grafici di funzioni del tipo $a\,\mathrm{e}^{ct}$: questo tipo di funzioni internazionalmente vengono talvolta chiamate impropriamente *exponential functions* anche se $a \neq 1$.

BOZZA - DRAFT

16.19 ESERCIZI SULLA LEZIONE 16

16.19.1 Esercizio risolto a – Risoluzione per via grafica

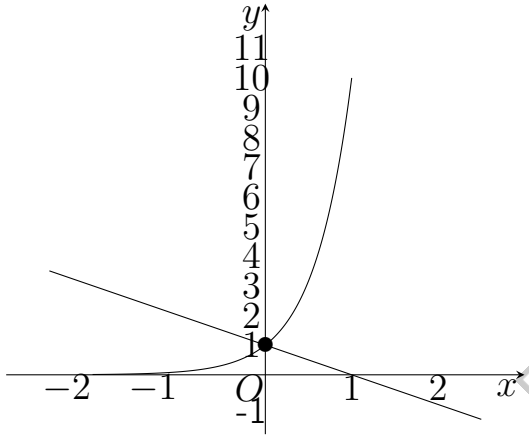
$_{\mu 2024}$ $*$ Risolvere per via grafica il sistema di equazioni

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ y = 10^x \end{cases}$$

(dando la soluzione nella forma $x = ...$, $y = ...$).

SVOLGIMENTO

BOZZA - DRAFT



Già bastano questi pochi (valori delle coordinate di) punti dei 2 grafici

x	$1-x$
-2	3
-1	2
0	1
1	0
2	-1

BOZZA - DRAFT

x	10^x
-2	$\frac{1}{100}$
-1	$\frac{1}{10}$
0	1
1	10

e disegnando (vedi figura) sullo stesso piano cartesiano grafici (approssimativi), vediamo subito che c'è un punto di intersezione $(0, 1)$, e non esistono altri per le proprietà elementari delle funzioni $1 - x$ e 10^x, e allora la soluzione del sistema di equazioni è data dalle coordinate x e y dell'unico punto di intersezione dei grafici:

$$\boxed{x = 0,\ y = 1}$$

BOZZA - DRAFT

16.19.2 Esercizio risolto b – Equazione con logaritmi decimali

$\mu 2018 \neq$
$\approx$ Si risolva l'equazione

$$\log_{10} \frac{x^2}{x^2 + 10} + \log_{10} \frac{x^2 + 10}{10^2} = 1$$

SVOLGIMENTO

Prima di tutto osserviamo che deve essere

$$\underline{x \neq 0}$$

(altrimenti si avrebbe l'inesistente $\log_{10} 0$). (Altre condizioni da richiedere non ci sono perché per $x \neq 0$ gli argomenti dei logaritmi sono entrambi evidentemente positivi).
Ricordando che la somma dei logaritmi (in una stessa base) è il logaritmo (in quella stessa base) del prodotto, si ha

$$\log_{10}\left(\frac{x^2}{x^2+10} \cdot \frac{x^2+10}{10^2}\right) = 1$$

e semplificando

$$\log_{10} \frac{x^2}{10^2} = 1 \quad \Big/ \, 10^{\wedge} \quad \leftarrow \textit{potenza in base } 10\textit{; elimina il logaritmo in base } 10$$

$$\frac{x^2}{10^2} = 10^1 \quad \Big/ \cdot 10^2$$

$$x^2 = 10^2 \cdot 10^1$$

$$x = \pm\sqrt{10^2 \cdot 10} = \pm\sqrt{10^2}\,\sqrt{10}$$

e in conclusione (senza che la condizione $x \neq 0$ ci faccia escludere qualche valore)

BOZZA - DRAFT

$$\boxed{x \approx \pm 31.623}$$

oppure con un decimale in meno

$$\boxed{x \approx \pm 31.62}$$

16.19.3 Esercizio risolto c – Equazione con ln e lg

$\overset{\mu}{\approx}$
Risolvere

$$\lg \ln x^2 = 0$$

SVOLGIMENTO
Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare quello del punto decimale, a scelta).

$$\lg \ln x^2 = 0 \quad \Big/ 10^{\wedge}$$

(passaggio che non introduce soluzioni spurie ovvero fittizie)

$$\ln x^2 = 10^0$$

BOZZA - DRAFT

$$\ln x^2 = 1 \quad \Big/ \exp$$

(passaggio che non introduce soluzioni spurie ovvero fittizie)

$$x^2 = \mathrm{e}$$

$$x = \pm\sqrt{\mathrm{e}}$$

e ricordando che $\mathrm{e} \approx 2{,}718$

$$\boxed{\approx \pm 1{,}649}$$

Nota 1. In qualche equazione coi logaritmi per così dire "capricciosa" può capitare che qualche passaggio incauto introduca soluzioni spurie ovvero fittizie, che assolutamente non sono soluzioni ma sembrano esserlo. Per esempio con questi passaggi

$$\lg x + \lg(2\,x) = 0$$

$$\lg(x \cdot 2 \cdot x) = 0$$

$$\lg(2\,x^2) = 0 \quad \Rightarrow 2\,x^2 = 1 \quad \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

BOZZA - DRAFT

troviamo una soluzione spuria ovvero fittizia negativa che assolutamente non è soluzione dell'equazione iniziale perché $\lg$ non esiste per argomenti negativi. Ma i passaggi svolti per risolvere l'esercizio iniziale, $\lg \ln x^2 = 0$, sono di quelli "sicuri", che non introducono soluzioni spurie ovvero fittizie.

Nota 2. Non è una buona idea cercare di risolvere l'equazione con la proprietà del logaritmo della potenza

$$(\forall\, \alpha \in \mathbb{R})(\forall\, x > 0)\, \mathsf{LOG}(x^\alpha) = \alpha\, \mathsf{LOG}(x)$$

(ove LOG indica 2 volte 1 stesso logaritmo in qualunque base) perché essa, come si vede scritto, vale per $x > 0$, e di fatto, incautamente applicandola in questo esercizio, fa perdere la soluzione negativa. (Per x negativo la formula $\mathsf{LOG}(x^\alpha) = \alpha\, \mathsf{LOG}(x)$ non ha senso).
Piuttosto, si potrebbe applicare la proprietà degli esponenti pari, aggiungendo il valore assoluto.

ESERCIZIO$_{\mu 2020}$

$*\approx$ Risolvere l'equazione

$$\mathrm{e}^{2\,x^3} - \mathrm{e}^{2\,\lg^6(2\lg 100)} = 0$$

SVOLGIMENTO

Ovviamente $\lg 100 = 2$

$$\mathrm{e}^{2\,x^3} = \mathrm{e}^{2\,\lg^6(2\cdot 2)} \quad \Big/\ \ln$$

BOZZA - DRAFT

$$2\,x^3 = 2\,\lg^6 4 \quad \Big/ : 2$$

$$x^3 = \lg^6 4 \quad \Big/ \sqrt[3]{\cdot}$$

$$x = \lg^2 4 =$$

che è la soluzione esatta, e infine con le proprietà dei logaritmi e la nota approssimazione $\lg 2 \approx 0{,}3$

$$= \lg^2 2^2 = (\lg 2^2)^2 = (2\,\lg 2)^2 \approx (2 \cdot 0{,}3)^2 = 0{,}6^2 = 0{,}36$$

$$\boxed{\lg^2 4 \approx 0{,}36}$$

(Un valore più preciso è $0{,}3625$, come si può verificare per esempio online su WolframAlpha con `Log[10,4]^2`).

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

$*$ Si risolva quest'equazione:

$$\log_{10} x + \log_{10} 200 - \log_{10}(1 + x^2) = \log_3 9$$

SVOLGIMENTO

Prima di tutto osserviamo che dev'essere

BOZZA - DRAFT

$$\underline{x > 0}$$

perché x è argomento di un logaritmo. (Ovviamente $1 + x^2 > 0$ sempre). Ricordando le $\log_b u + \log_b v = \log_b(u\,v)$ e $\log_b u - \log_b v = \log_b \frac{u}{v}$ e $3^2 = 9$

$$\log_{10} \frac{x \cdot 200}{1 + x^2} = 2 \qquad \Big/ 10^{\wedge} \quad \leftarrow \textit{potenza in base } 10\textit{; elimina il logaritmo in base } 10$$

$$\frac{200\,x}{1 + x^2} = 100 \qquad \Big/ \cdot \frac{1 + x^2}{100}$$

$$2\,x = 1 + x^2$$

$$x^2 - 2\,x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$\boxed{x = 1}$$

(Che è > 0).

ESERCIZIO $_{\mu}$

$*\approx$ Risolvere l'equazione $4\lg(100\,x) = 9$.

SVOLGIMENTO

$$4\lg(100\,x) = 9 \qquad \Big/ : 4$$

BOZZA - DRAFT

$$\lg(100\,x) = \frac{9}{4}$$

e per la proprietà del logaritmo del prodotto

$$\lg 100 + \lg x = \frac{9}{4}$$

$$\lg 10^2 + \lg x = \frac{9}{4}$$

$$2 + \lg x = \frac{9}{4}$$

$$\lg x = \frac{9}{4} - 2$$

$$\lg x = \frac{9-8}{4}$$

$$\lg x = \frac{1}{4} \quad \Big/ 10^{\wedge}$$

$$x = 10^{\frac{1}{4}}$$

ovvero

$$\boxed{\sqrt[4]{10} \approx 1{,}778\,28}$$

BOZZA - DRAFT

(La radice quarta si calcola con la calcolatrice come radice quadrata della radice quadrata: $\sqrt[4]{z} = \sqrt{\sqrt{z}}$)

BOZZA - DRAFT

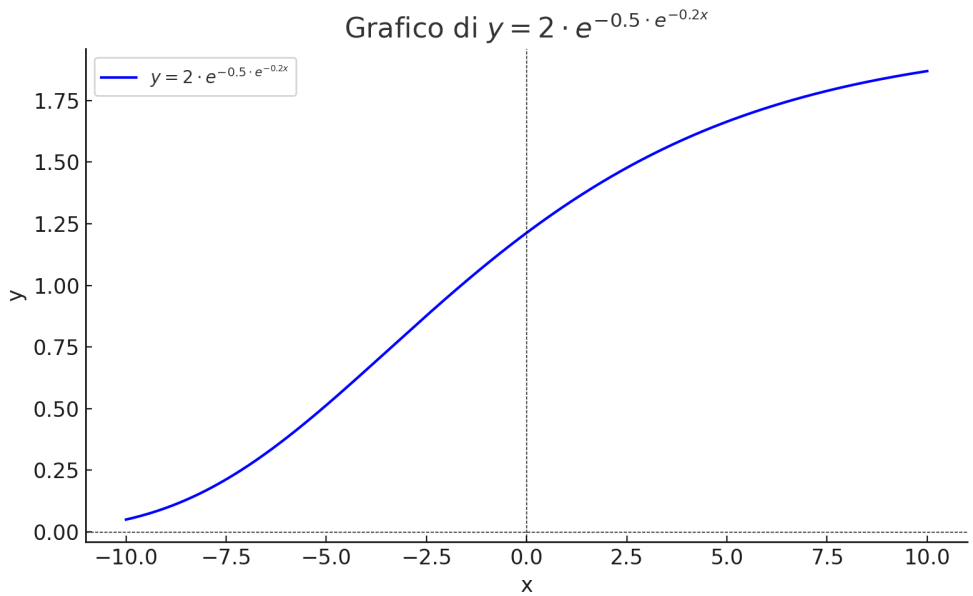


Figura 6: Grafico di $y = 2 \cdot e^{-0.5 \cdot e^{-0.2x}}$. (By Vispo Volpino with ChatGPT).