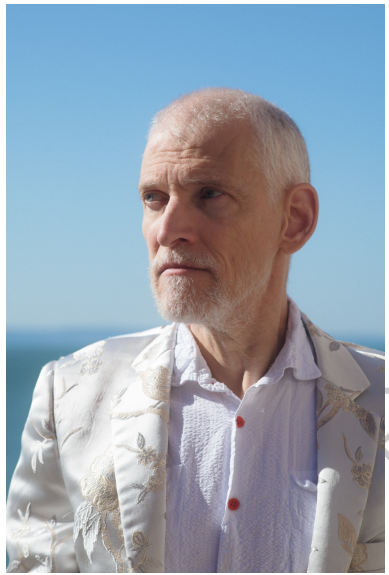
Le Compresse di Matematica per le Scienze della Farmacia

Lezioni 16-17

versione 28 ottobre 2026

BOZZA - DRAFT

Università degli Studi di Trieste



Alessandro Soranzo
Ricercatore universitario
Settore Scientifico Disciplinare:
MATH-03/A - Analisi matematica
Gruppo Scientifico Disciplinare:
01/MATH-03 - Analisi matematica, probabilità e statistica matematica

BOZZA - DRAFT

Indice

16 Esponenziali e logaritmi – III parte **7**

16.1 Conversioni fra logaritmi naturali e decimali[10] 7
16.2 Calcolo del valore di un logaritmo[13] 8
16.3 Primo passo per il calcolo dei logaritmi[17] 9
16.4 Calcolo approssimato dei logaritmi decimali dei numeri da 1 a 10^{20}[20] 9
16.5 Risoluzione pratica delle equazioni con exp e log[24] . . 13
16.6 Soluzioni spurie ovvero fittizie[27] 22
16.7 Complementi – dis/equazioni con exp e log: teoria . . 24
16.8 L'esponenziale e la campana gaussiana[31] 27
16.9 Il logaritmo decimale come contatore di zeri[34] 31
16.10 Ordine di grandezza di un numero positivo[38] 32
16.11 Il decadimento esponenziale, anche in Farmacia[41] . . 37
16.12 Emivita di una sostanza nel sangue o nelle ossa[44] . . 38
16.13 Regola pratica su emivita e steady state[48] 40

BOZZA - DRAFT

16.14 L'intensità sonora, i logaritmi e i decibel[51] 41
16.15 Complementi – Il piombo nelle ossa 42
16.16 Complementi – Equazioni con LOG e x libera 46
16.17 Complementi – Fibonacci ed esponenziali 47
16.18 ESERCIZI SULLA LEZIONE 16[55] 51
16.18.1 Esercizio risolto a – Risoluzione per via grafica 51
16.18.2 Esercizio risolto b – Equazione con logaritmi decimali 53
16.18.3 Esercizio risolto c – Equazione con ln e lg . . 55

17 Funzioni trigonometriche **62**
17.1 Introduzione alle funzioni seno e coseno[58] 62
17.2 Definizioni[02] 70
17.3 Grafici e formule principali[05] 72
17.4 Altre formule[09] 74
17.5 Gradi e radianti[12] 77
17.6 Esempio di conversione da radianti a gradi[16] 80

BOZZA - DRAFT

17.7 Alcuni valori notevoli[19] 81
17.8 Funzioni goniometriche inverse[22] 82
17.9 Arcotangente e angolo di riposo delle polveri[26] 83
17.10Complementi – Esercizio sull'angolo di riposo 84
17.11Complementi – Definizione geometrica di arctan . . . 85
17.12Proprietà dell'arcotangente[29] 86
17.13Simboli dell'arcotangente e funzioni affini[33] 87
17.14Complementi – Alcuni valori dell'arcotangente 89
17.15Trigonometria – La goniometria dei triangoli[36] 90
17.16I ritmi circadiani e il coseno[40] 91
17.17Polarimetria: il coseno per le chiralità[43] 92
17.18Complementi – Dettagli tecnici sul polarimetro 93
17.19La legge di Bragg e il polimorfismo dei farmaci[47] . . . 94
17.20Complementi – Dettagli sulla legge di Bragg 95
17.21Complementi – Altre formule goniometriche 97
17.22Complementi – Il calcolo di queste funzioni 100
17.23Complementi – Angoli notevoli 101

BOZZA - DRAFT

17.24Complementi – Trigonometria 104
17.25Complementi – Geometricamente e analiticamente . . 105
17.26Complementi: Funzioni goniometriche in Farmacia . . 107

BOZZA - DRAFT

16 Esponenziali e logaritmi – III parte

16.1 Conversioni fra logaritmi naturali e decimali[10]

$$\boxed{\lg x \approx 0.4343 \ln x} \qquad (1)$$

Cioè il logaritmo decimale è *vagamente*(1) la metà del naturale e con maggior precisione il 43% e ancor meglio 43.43%.

BOZZA - DRAFT

[1] Questa formula e la sua inversa

$$\ln x \approx \frac{\lg x}{0.4343}$$

hanno circa $\frac{1}{79\,000}$ di errore relativo.
Le formule esatte sono

$$\ln x = \frac{\lg x}{\lg \mathrm{e}} \qquad \lg x = (\lg \mathrm{e}) \ln x$$

Esempio$_\mu$

$$\ln 2 \approx \frac{\lg 2}{0.4343} \approx \frac{0.3}{0.4343} \approx 0.69$$

costante spesso approssimata a 0.7 in Farmacologia nella trattazione dell'emivita dei farmaci, come vedremo in un paragrafo successivo.

16.2 Calcolo del valore di un logaritmo[13]

Il logaritmo in base 2 di 8 è 3 perché 2^3 fa 8.
Con argomentazioni analoghe si calcolano a mente molti logaritmi.

Una buona calcolatrice scientifica calcola i logaritmi in base 10 e in base e.

Online con WolframAlpha con Log[$base$, $numero$] si calcolano i logaritmi in qualunque base.

BOZZA - DRAFT

16.3 Primo passo per il calcolo dei logaritmi[17]

Dato un numero positivo x, lo si esprima in notazione scientifica

$$x = t \cdot 10^n \qquad 1 \leq t < 10$$

e allora vale

$$\lg x = \lg t + n \qquad 1 \leq t < 10 \tag{2}$$

e allora ci basta saper calcolare approssimatamente il logaritmo decimale dei numeri fra 1 e 10.

Per esempio

$$\lg 2026 = \lg(2.026 \cdot 10^3) = 3 + \lg 2.026$$

16.4 Calcolo approssimato dei logaritmi decimali dei numeri da 1 a 10^{20}

Considereremo 9 metodi:

BOZZA - DRAFT

1) con questa formula

$$\lg t \approx \frac{\sqrt{\sqrt{t}-1}}{\frac{\sqrt{\sqrt{t}}}{4}+0.33} \qquad 1 \leq t < 10 \qquad errore^{(2)} < 1\% \tag{3}$$

per esempio con la sezione aurea viene $\lg \varphi \approx 0.209$ (si verifichi)

2) con artifici come quelli usati per i logaritmi di 3, 4, 5...

3) con una calcolatrice scientifica reale

4) con un'app di calcolatrice scientifica virtuale sul telefonino

5) online con WolframAlpha con `Log[`$base$`,`$numero$`]`

6) con le tavole cartacee (non sono affatto obsolete, anzi sono utili perché mostrano i valori intorno ad uno cercato, cosa che la calcolatrice non fa)

7) con le *logarithm tables* in rete (come sopra)

8) con altre approssimazioni[3]

BOZZA - DRAFT

[2] Errore percentuale rispetto l'esatto.

[3] Un'approssimazione calcolabile con le sole 4 operazioni e la radice quadrata è

$$\log_{10} x \approx (x^{1/256} - 1) \times 111$$

che su una calcolatrice che operi con almeno 7 cifre (decimali) significative dovrebbe avere non più di 0.004

9) con l'obsoleto *regolo calcolatore*. "gli astronauti (...) si servivano di regoli calcolatori (...) durante le missioni Apollo", da Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Regolo calcolatore*.

Per i logaritmi in altre basi si può calcolare il logaritmo decimale con le stesse formule (2) e (3) e poi usare la formula di cambiamento di base $\log_b x = \dfrac{\lg x}{\lg b}$.

Esercizio$_{\mu 2019}$
Di quanto aumenta il pH se la concentrazione degli H^+ diminuisce del 45%?

Svolgimento.
Verrà usato lo standard del punto decimale. (Ma si potrebbe usare quello della virgola decimale, a scelta).

BOZZA - DRAFT

---

di errore relativo (cioè 0.4%) e assoluto per $1.1 \le x \le 11$. Naturalmente $x^{1/256}$, si ottiene estraendo 8 volte consecutive la radice quadrata.

Per i numeri $x < 1.1$ o $x > 11$, si scelga $m \in \mathbb{Z}$ affinché $y = 10^{-m}x$ ricada in $[1.1, 11]$, e allora

$$\log_{10} x = \log_{10}(10^m y) = m + \log_{10} y$$

per esempio $\log_{10} 1265 = 3 + \log_{10} 1.265$.

Diminuire del 45% significa moltiplicare per 0.55:

$$\mathrm{pH}_{new} =$$

$$= \mathrm{pH}(y \cdot 0.55) = -\lg(y \cdot 0.55) = -\lg y - \lg 0.55 =$$

$$= \mathrm{pH}(y) - \lg(5.5 \cdot 10^{-1}) = \mathrm{pH}_{old} - (-1 + \lg 5.5) \approx$$

con la formula approssimata (3) di cui sopra

$$\approx \mathrm{pH}_{old} - (-1 + 0.745) = \mathrm{pH}_{old} - (-0.255) =$$

$$\approx \mathrm{pH}_{old} + 0.26$$

cioè

il pH aumenta di ≈ 0.26

(Con la calcolatrice ≈ 0.259637).

BOZZA - DRAFT

16.5 Risoluzione pratica delle equazioni con exp e log[24]

Nella pratica le equazioni con esponenziali e logaritmi si possono risolvere abbastanza meccanicamente applicando di passaggio in passaggio regole formali, purché le equazioni siano sufficientemente semplici.
Ne vedremo adesso alcune.

BOZZA - DRAFT

Consideriamo un'equazione

$$A = B$$

in cui almeno 1 delle espressioni A e B contiene l'incognita, che chiameremo x, e almeno 1 delle 2 espressioni contenga logaritmi o esponenziali.

(1) – ***Calcolo effettivo del logaritmo*** con la sua definizione: *l'esponente da dare alla base per avere l'argomento*. Per esempio

$$2\,x - \log_4 64 = 0$$

$$\Rightarrow 2\,x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

(2) – ***Passaggio al logaritmo*** in base 10 oppure e oppure altra base, di entrambi i membri dell'equazione. Per esempio

$$2^{3\,x} = 8 \quad \Big/ \log_2$$

$$\log_2(2^{3\,x}) = \log_2 8$$

$$3\,x = 3$$

$$x = 1$$

(3) – ***Sostituzione approssimata di*** lg2 ***con 0,3***. Per esempio

$$10^x = 2 \quad \Big/ \lg$$

$$x = \lg 2$$

$$\Rightarrow x \approx 0{,}3 \text{ (standard della virgola decimale)}$$

BOZZA - DRAFT

(4) – ***Sostituzione approssimata di*** **lg e** ***con 0,4343***. Per esempio

$$10^x = \mathrm{e}$$

$$x = \lg \mathrm{e} \approx 0{,}4343 \quad \text{(standard della virgola decimale)}$$

(5) – ***Calcolo approssimato del logaritmo*** con uno dei metodi visti. Per esempio

$$10^x = 500 \quad \Big/ \lg$$

$$x = \lg 500$$

$$= \lg \frac{1000}{2} =$$

$$= \lg 1000 - \lg 2 =$$

$$= 3 - \lg 2 \approx$$

$$\approx 3 - 0{,}3$$

$$\Rightarrow x \approx 2{,}7 \quad \text{(standard della virgola decimale)}$$

BOZZA - DRAFT

Adesso vedremo su un esempio altri 6 possibili passaggi.

Consideriamo questa equazione:

$$2\,(x^2{+}1)\,\ln(2\,x)^2{+}(x^2{+}1)\,\lg x^4{+}x\,\ln\frac{1}{|x|}{+}\frac{2}{3}\,\ln|x|^x{+}x\,\ln\sqrt[3]{|x|}=0 \tag{4}$$

Ecco ora altri 6 possibili passaggi formali fattibili, da scegliere accuratamente.

(6) – ***Logaritmo di una radice***

$$2\,(x^2{+}1)\,\ln(2\,x)^2{+}(x^2{+}1)\,\lg x^4{+}x\,\ln\frac{1}{|x|}{+}\frac{2}{3}\,\ln|x|^x{+}x{\cdot}\frac{1}{3}\,\ln|x|=0$$

BOZZA - DRAFT

(7) – ***Logaritmo del reciproco***[4]

$$2\,(x^2{+}1)\,\ln(2\,x)^2{+}(x^2{+}1)\,\lg x^4{-}x\,\ln|x|{+}\frac{2}{3}\,\ln|x|^x{+}x{\cdot}\frac{1}{3}\,\ln|x|=0$$

(8) – ***"Tirare giù gli esponenti e se pari mettere il valore assoluto"***:

$$2{\cdot}(x^2{+}1){\cdot}2{\cdot}\ln|2\,x|{+}(x^2{+}1){\cdot}4{\cdot}\lg|x|{-}x\,\ln|x|{+}\frac{2}{3}{\cdot}x\,\ln|x|{+}x{\cdot}\frac{1}{3}\,\ln|x|=0$$

e gli ultimi 3 addendi si elidono, e poi, con passaggio algebrico,

$$4\,(x^2+1)\,\ln|2\,x|+4\,(x^2+1)\,\lg|x|=0 \quad \Big/ : (4\,(x^2+1)) \neq 0$$

$$\ln|2\,x|+\lg|x|=0 \;\; (segue\ un\ passaggio\ algebrico)$$

$$\ln(|2|\cdot|x|)+\lg|x|=0 \;\; (segue\ un\ passaggio\ algebrico)$$

[4]Il passaggio del logaritmo del reciproco non è indispensabile, perché si ottiene dalle proprietà del logaritmo del quoziente e del logaritmo di 1:

$$\mathrm{LOG}\frac{1}{z}=\mathrm{LOG}(1)-\mathrm{LOG}(z)=0-\mathrm{LOG}(z)=-\mathrm{LOG}(z)$$

BOZZA - DRAFT

$$\Rightarrow \ln(2\,|x|) + \lg|x| = 0 \tag{5}$$

(9) – ***Passare dalla base e a 10 o viceversa***, approssimatamente con la $\lg a \approx 0{,}4343 \ln a$ (oppure esattamente con la $\lg a = (\lg \mathrm{e}) \ln a$, che comunque non ci proponiamo di imparare a memoria):

$$\Rightarrow \ln(2\,|x|) + (\lg \mathrm{e}) \ln|x| = 0 \tag{6}$$

(10) – ***Logaritmo del prodotto***:

$$\Rightarrow \ln 2 + \ln|x| + (\lg \mathrm{e}) \ln|x| = 0 \tag{7}$$

$$\ln 2 + \ln|x| + (\lg e) \ln|x| = 0 \quad \Big/ + (-\ln 2) \quad (passaggio\, algebrico)$$

$$\ln|x| + (\lg \mathrm{e}) \ln|x| = -\ln 2 \quad (segue\ un\ passaggio\ algebrico)$$

$$(1 + \lg e) \ln|x| = -\ln 2 \quad \Big/ : (1 + \lg \mathrm{e}) \neq 0 \quad (passaggio\, algebrico)$$

$$\ln|x| = \frac{-\ln 2}{1 + \lg \mathrm{e}} \tag{8}$$

BOZZA - DRAFT

(11) – ***Esponenziazione*** in base 10 oppure e oppure altra base:

$$\ln|x| = \frac{-\ln 2}{1+\lg \mathrm{e}} \quad \Big/ \exp$$

$$|x| = \exp\left(\frac{-\ln 2}{1+\lg \mathrm{e}}\right) \quad (segue\ un\ passaggio\ algebrico)$$

$$\boxed{x = \pm \exp\left(\frac{-\ln 2}{1+\lg e}\right)}$$

Altre 4 possibili tecniche risolutive

che comunque non ci proponiamo di imparare a memoria

BOZZA - DRAFT

(12) **Formule di cambiamento di base**

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b} \quad \text{(5) (6) in particolare} \quad = \frac{\lg x}{\lg b} = \frac{\ln x}{\ln b}$$

da cui $\ln x = \frac{\lg x}{\lg \mathrm{e}}$ e con la (**??**) si ottiene la formula approssimata vista per la conversione fra logaritmi naturali e decimali.

(13) – ***"Unicità dell'intersezione dei grafici di*** a^t ***e*** b^t ***"***.

$$(\forall\, a > 0,\, b > 0,\, a \neq b) \qquad a^t = b^t \quad \Rightarrow \quad t = 0$$

Per esempio:

$$\mathrm{e}^{x^3} = 10^{x^3}$$
$$x^3 = 0$$
$$x = 0$$

(14) – ***"Unicità dell'intersezione dei grafici di*** $\log_a t$ ***e*** $\log_b t$ ***"***.

$$(\forall\, a > 0,\, b > 0,\, a \neq 1,\, b \neq 1,\, a \neq b) \qquad \log_a t = \log_b t \quad \Rightarrow \quad t = 1$$

[5] Anche $= (\log_c x) \cdot (\log_b c)$.

[6] Per il lettore interessato, si ricavano subito anche $\log_b x = \frac{1}{\log_x b}$, e $\log_{1/b} x = -\log_b x$.

BOZZA - DRAFT

(15) **Una formula di apparenza sorprendente** che raramente si trova:

$$x^{\mathsf{LOG}(y)} = y^{\mathsf{LOG}(x)} \qquad \forall\, x, y > 0$$

in particolare per il logaritmo naturale

$$\boxed{x^{\ln y} = y^{\ln x} \qquad \forall\, x, y > 0}$$

(che si dimostra – sostanzialmente – applicando ad ambo i membri il logaritmo nella base considerata; e si veda che WolframAlpha la dichiara `True`).

BOZZA - DRAFT

Bottom line. *I passaggi visti sono sufficienti per risolvere molte equazioni con esponenziali e logaritmi, unitamente all'algebra:*

– calcolo (a mano o con la calcolatrice o in altri modi) e proprietà delle 4 operazioni e del valore assoluto e del fattoriale e delle radici e delle potenze;

– sostituzione (coi loro valori approssimati) delle costanti conosciute (in forma approssimata) a memoria, come e, π, eccetera.

Ovviamente tutto ciò non basta per risolvere tutte le equazioni con gli esponenziali e/o i logaritmi: per esempio non la $\mathrm{e}^x = x + 1$, che comunque ovviamente ha unica soluzione $x = 0$. (Si disegnino i 2 grafici, di $f(x) := \mathrm{e}^x$ e di $g(x) := x+1$).

Ma si veda ancora il paragrafo seguente per una possibile problematica.

16.6 Soluzioni spurie ovvero fittizie[27]

In qualche equazione coi logaritmi per così dire "capricciosa" può capitare che qualche passaggio incauto introduca soluzioni spurie ovvero fittizie, che assolutamente non sono soluzioni ma sembrano esserlo. Al livello di questa trattazione elementare non è possibile dare un metodo generale per evitare sempre e comunque le soluzioni fittizie.

Per esempio con questi passaggi

$$\lg x + \lg(2\,x) = 0$$

BOZZA - DRAFT

$$\lg(x \cdot 2 \cdot x) = 0$$

$$\lg(2\,x^2) = 0 \quad \Rightarrow 2\,x^2 = 1 \quad \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

troviamo una soluzione spuria ovvero fittizia negativa che assolutamente non è soluzione dell'equazione iniziale perché $\lg$ non esiste per argomenti negativi.

Al limite estremo, in un'equazione particolarmente capricciosa anche la banale sostituzione di lg2 con l'approssimazione 0,3 potrebbe introdurre soluzioni fittizie, o di π con 3,14.

Molta parte della problematica si può evitare verificando se le soluzioni trovate verificano l'equazione iniziale, ed eventualmente quindi escludendone qualcuna.

Oppure – e può essere meno facile – trovando il dominio dell'equazione, ed escludendo le eventuali soluzioni al di fuori del dominio.

BOZZA - DRAFT

16.7 Complementi – dis/equazioni con exp e log: teoria

L'esponenziale in ogni base positiva diversa da 1 è iniettivo e allora si può applicarlo ad ambo i membri di un'equazione ottenendo un'equazione *equivalente*, cioè con le stesse (eventualmente esistenti) soluzioni:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 10^{f(x)} = 10^{g(x)}$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{f(x)} = \mathrm{e}^{g(x)}$$

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow b^{f(x)} = b^{g(x)} \qquad \forall\, b > 0,\, b \neq 1$$

Si può anche applicare l'esponenziale in base b positivo diverso da 1 a tutti e 4 i tipi di disuguaglianza e l'ordinamento si conserva se e solo se $b > 1$, che è il caso di maggior interesse:

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow 10^{f(x)} > 10^{g(x)}$$

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow \mathrm{e}^{f(x)} > \mathrm{e}^{g(x)}$$

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow b^{f(x)} > b^{g(x)} \qquad \forall\, b > 1$$

BOZZA - DRAFT

e tutte similmente con $<$, $\geq$, $\leq$.

Il logaritmo è iniettivo e definito per ogni numero positivo e allora

$$0 < f(x) = g(x) \Leftrightarrow \lg f(x) = \lg g(x)$$

$$0 < f(x) = g(x) \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln g(x)$$

$$0 < f(x) = g(x) \Leftrightarrow \log_b f(x) = \log_b g(x)$$

cioè si può applicare il logaritmo in qualunque base ad ambo i membri di un'equazione $f(x) = g(x)$ ottenendo un'equazione *equivalente*, cioè con le stesse (eventualmente esistenti) soluzioni, se $f(x) > 0$ nel suo dominio, oppure $g(x) > 0$ nel suo dominio (è equivalente), in particolare se una delle 2 funzioni è un esponenziale in qualche base eventualmente moltiplicato per una costante positiva, che è il caso più comune nella pratica.

Di più: il logaritmo decimale e quello naturale e ogni logaritmo in

BOZZA - DRAFT

base $b > 1$ sono crescenti[7] e allora si può applicarli conservando l'ordinamento:

$$0 < f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \lg f(x) \leq \lg g(x) \quad e\, anche\, con \quad <$$

$$0 < f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \ln f(x) \leq \ln g(x) \quad e\, anche\, con \quad <$$

$$\forall\, b > 1 \quad 0 < f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \log_b f(x) \leq \log_b g(x) \; e\, anche\, con \quad <$$

BOZZA - DRAFT

[7] Invece coi logaritmi in base minore di 1 si inverte l'ordinamento:

$$(\forall\, b,\, 0 < b < 1) \quad 0 < f(x) < g(x) \Leftrightarrow \log f(x) > \log g(x)$$

$$(\forall\, b,\, 0 < b < 1) \quad 0 < f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow \log f(x) \geq \log g(x)\,.$$

16.8 L'esponenziale e la campana gaussiana[31]

Nelle Scienze Applicate un'infinità di fenomeni vengono bene modellizzati da funzioni con grafico più o meno a campana.

Talvolta queste campane sono simmetriche, o almeno più o meno simmetriche, altre volte sono lontane dalla simmetria.

Occupiamoci adesso solo delle campane simmetriche.

La più "pura" delle campane simmetriche, diciamo il modello ideale in qualche modo, è la campana gaussiana, che ha un'equazione basata sull'esponenziale

$$y = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\,\pi}}$$

chiamata *densità normale standard*.
Ha asse di simmetria $x = 0$, cioè l'asse y, e l'asse di simmetria può

BOZZA - DRAFT

venir spostato in $x = m$ qualsiasi, con l'equazione

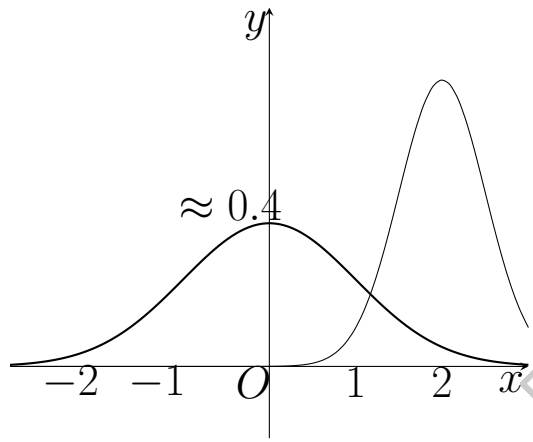
$$y = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2}}}{\sqrt{2\,\pi}}$$

ma avvertiamo il Lettore che invece della lettera m di solito si usa la corrispondente lettera greca μ.
Può essere resa più o meno ribassata ovvero "ripida" con un ulteriore parametro $\sigma > 0$ ottenendosi l'equazione generale

$$y = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}$$

chiamata *densità normale di parametri* μ *e* σ.

BOZZA - DRAFT



– Densità normale di parametri $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ ovvero densità normale standard

– densità normale di parametri $\mu = 2$ e $\sigma = 0.5$

Grafici di questo genere si otterranno, fra l'altro, con le altezze degli Italiani.
E non solo degli italiani: anche degli europei, e anche solo degli Studenti di Farmacia.

Curve a campana alquanto asimmetriche modellizzano bene il nume-

BOZZA - DRAFT

ro di morti (o casi o terapie intensive...) giornaliero (o settimanale o anche mensile) delle ondate epidemiche e le glicemie, colesterolemie, sideremie...

Equazioni per modellizzarle sono ancora basate sull'esponenziale.

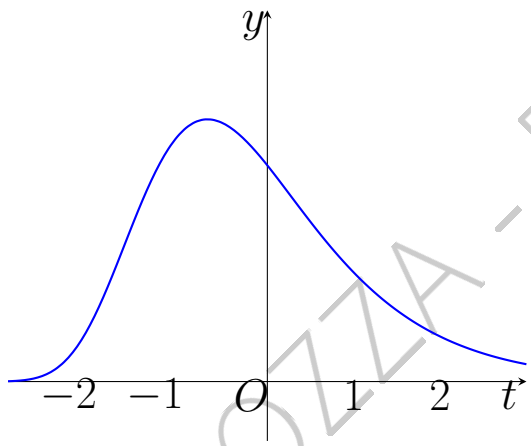


Grafico di

$$12\,\mathrm{e}^{-t-0.5\,\mathrm{e}^{-t}}$$

Il tempo t potrebbe essere in mesi, e lo 0 all'ultimo giorno di un certo anno.

BOZZA - DRAFT

16.9 Il logaritmo decimale come contatore di zeri[34]

Logaritmi decimali delle potenze di 10:

-3 0.001 tre zeri ma con punto decimale
-2 0.01
-1 0.1
0 1 zero zeri
1 10
2 100
3 1000 tre zeri

BOZZA - DRAFT

16.10 Ordine di grandezza di un numero positivo[38]

L'ordine di grandezza è un concetto tanto utile nelle Scienze Applicate, quanto mal definito nelle stesse Scienze Applicate, come anche altre volte succede (per esempio con le cifre significative).
Qua facciamo una scelta definizionale.

Ci sono 2 questioni:
– definire l'ordine di grandezza di 1 numero positivo;
– dire quando 2 numeri positivi hanno UGUALE ordine di grandezza.

Per la seconda questione, l'uso generale è dire che 2 numeri positivi hanno UGUALE ordine di grandezza se il rapporto del più grande e il più piccolo sta fra 1 e 10. (Non si dichiara quale sia l'ordine di grandezza, si dice solo che è uguale ovvero lo stesso).
(Ma, dopo che avremo definito l'ordine di grandezza, numeri con rapporto 2 o anche 1.1 potranno non avere UGUALE ordine di grandezza,

BOZZA - DRAFT

per esempio 95 e 103 ☹ comunque la consolazione è che i 2 ordini di grandezza non distano mai più di 1).

Come abbiamo già detto, ogni numero positivo x ammette una scrittura

$$x = a \cdot 10^n$$

con $1 \leq a < 10$ e n intero: $...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...$
Adesso chiamiamo n ordine di grandezza di x e aggiungiamo:

$$\boxed{\textbf{ordine di grandezza } \text{di } x: \quad n := \lfloor \lg x \rfloor} \tag{9}$$

cioè

$$ordine\ di\ grandezza\ di\ x\ =\ parte\ intera\ di\ \lg x$$

Ma altri Autori definiscono con condizioni su a diverse da $1 \leq a < 10$.
(Wikipedia in inglese ne dà altre 2).
Qualunque definizione – ragionevole – di ordine di grandezza si usi per 2 numeri positivi

BOZZA - DRAFT

se hanno ugual ordine di grandezza
il massimo non supera il decuplo del minimo

cioè sono simili almeno molto molto vagamente, e

se hanno ordini di grandezza m e $m+1$
il massimo non supera il centuplo del minimo
(ma in generale sarà molto molto vagamente il decuplo)

BOZZA - DRAFT

5 è l'ordine di grandezza del numero di capelli di una persona

11 è l'ordine di grandezza del numero di stelle della Via Lattea

13 è l'ordine di grandezza del numero di globuli rossi di un uomo (3.0×10^{13})

Quindi il numero di globuli rossi di un uomo è molto vagamente il centuplo del numero di stelle della Via Lattea.

L'ordine di grandezza è molto usato nelle Scienze applicate per fissare le idee sulla grandezza approssimativa di un numero, per agili confronti,

semplificandolo all'estremo in un singolo numero intero, spesso fra -20 e 20 (e quasi sempre fra -30 e 30).
Ma la grossolanità dell'approssimazione è mostrata dal fatto che

9 è l'ordine di grandezza del numero di persone del mondo

come se fossero un miliardo e invece sono circa 8 miliardi.

Magari in novembre l'amministrazione dell'università non conosce ancora il numero esatto di quelli che saranno iscritti a Farmacia e Medicina ma può considerare plausibile che i secondi saranno in numero di un ordine di grandezza superiore ai primi.
Questo tipo di grossolanissime approssimazioni sono utilissime nella gestione pratica della realtà.

BOZZA - DRAFT

Orders of Magnitude in Biology

Fill in the blanks in the table using the information given.

Nanometre (nm)	1000000 x smaller than a millimetre
Micrometre (μm)	1000000 x smaller than a metre
Millimetre (mm)	1000 x smaller than a metre
Metre (m)	
Kilometre (km)	1000 x bigger than a metre

10^{2} = 10 x 10 This is the same as moving the decimal place one place to the right. 10.0 → 100.0

10^{3} = 10 x 10 x 10 This is the same as moving the decimal place two places to the right. 10.0 → 1000.0

10^{-1} = 1 ÷ 10 This is the same as moving the decimal place one place to the left. 1.0 → 0.1

10^{-4} = 1 ÷ 10 ÷ 10 ÷ 10 ÷ 10 This is the same as moving the decimal place four places to the left. 1.0 → 0.0001

Atom	DNA	Virus	Prokaryotic cell	Eukaryotic cell	Flea	Woodlouse	Peach	Child	Whale	Giant Redwood	School Drive
											
0.000000001m	0.00000001m	0.0000001m		0.00001-0.0001m			0.1m	1m	10m		
			10^{-5}m			10^{-2}m		1m	10m	10^{2}m	
		100nm		10-100μm	1mm		10cm	1m	10m		1km

Creative-Commons-CC-BY-SA image retrieved (2024) in

https://physics-fiction.fandom.com/wiki/Scale_%26_Magnitude_Order?file=Order_of_Magnitude.png

16.11 Il decadimento esponenziale, anche in Farmacia[41]

Illustriamo una famiglia (insieme) di funzioni con l'esponenziale, che ricorre amplissimamente nelle Scienze Applicate, ed è espressa dai vari Autori in 2 modi diversi, con una costante negativa (che qua sarà k) oppure con una costante positiva (che qua sarà r) preceduta dal segno meno:

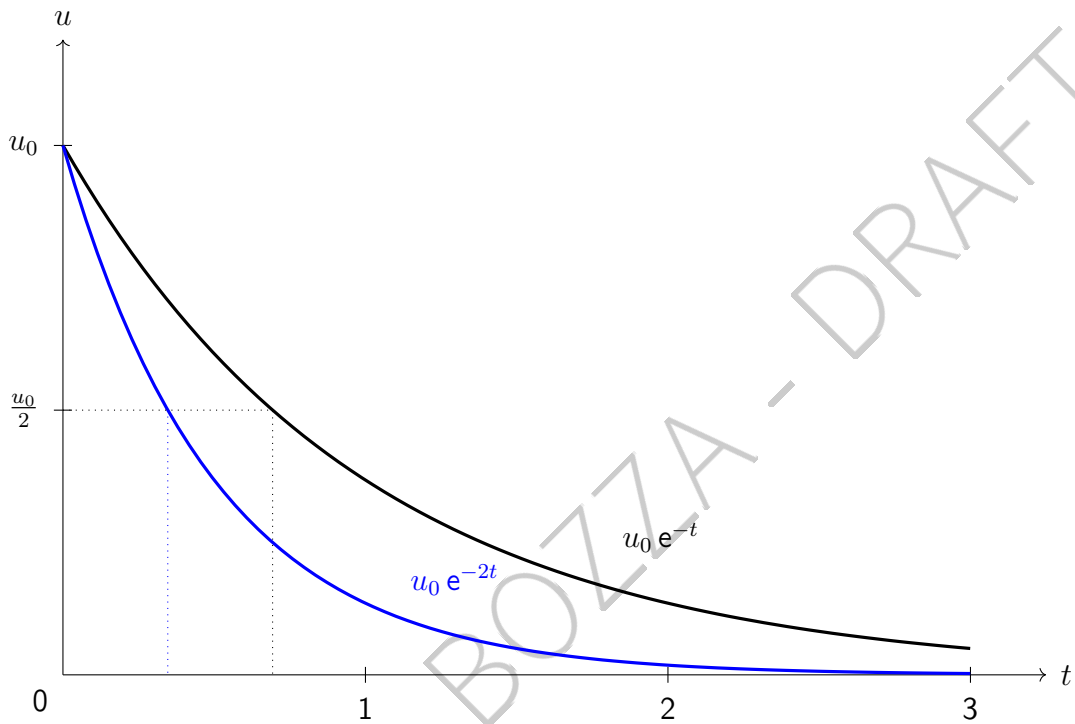
$$u(t) = u_0\,\mathrm{e}^{k\,t} \quad \text{essendo } u_0 = u(0) \qquad k < 0$$

$$\boxed{u(t) = u_0\,\mathrm{e}^{-r\,t} \quad \text{essendo } u_0 = u(0) \qquad r > 0} \tag{10}$$

e la costante k ovvero r dipende da caso a caso.
È l'equazione di un'infinità di fenomeni che si attenuano nel tempo: in Farmacia, soprattutto la concentrazione plasmatica di un farmaco dopo la somministrazione, che nella maggior parte dei casi diminuisce proprio così (si parla di *cinetica del primo ordine*), e allora r si chiama *costante di eliminazione*.
Più grande è r, più rapida è l'eliminazione: si veda la figura che segue.

BOZZA - DRAFT

16.12 Emivita di una sostanza nel sangue o nelle ossa[44]



BOZZA - DRAFT

L'emivita $t_{1/2}$ di un farmaco o un veleno è[(8)] una quantità di tempo,

[8] La formula $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{r} \approx \frac{0.7}{r}$ collega $t_{1/2}$ alla costante di eliminazione r.

per esempio 3 minuti, che è un parametro *farmacocinetico*: indica il tempo richiesto per ridurre del 50% la concentrazione plasmatica[9] del farmaco o del veleno, cioè per dimezzarsi.

Dopo n emivite resta $(1/2)^n$ della concentrazione iniziale: dopo 1 emivita $\frac{1}{2}$, poi $\frac{1}{4}$, poi $\frac{1}{8}$, poi $\frac{1}{16}$, poi $\frac{1}{32}$...

Per curiosità[10] e senza qua dare garanzie, alcune emivite di farmaci: noradrenalina 2 minuti; morfina 2-3 ore; donepezil 3 giorni (70 ore); bedaquilina 165 giorni.
E l'emivita del piombo nelle ossa: 10 anni.

BOZZA - DRAFT

[9] È inversamente proporzionale alla sua clearance (Cl) e direttamente proporzionale al suo volume di distribuzione (V_d) secondo la formula

$$t_{1/2} = 0.7\frac{V_d}{Cl}$$

dove la costante 0,7 è in realtà un'approssimazione del logaritmo naturale di 2 (in effetti, più in particolare $\ln(2) = 0,69...$).

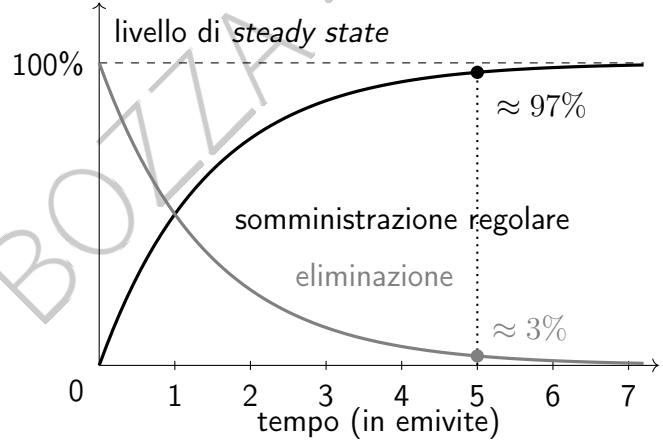
[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Biological_half-life

16.13 Regola pratica su emivita e steady state[48]

5 emivite:
resta $\approx 3\%$
steady state $\approx 97\%$

Dopo n emivite resta la frazione $(1/2)^n$ della quantità iniziale: dopo 5 emivite resta $1/32$, circa il 3%. È la regola pratica delle "5 emivite" per l'eliminazione (quasi) completa di un farmaco.
Analogamente avviene per lo *steady state* (stato stazionario): se il farmaco viene somministrato con regolarità (a dosi e intervalli costanti, o in infusione continua), la concentrazione sale verso un livello di equilibrio, in cui la quantità eliminata compensa quella somministrata.

Dopo n emivite si è raggiunta la frazione $1 - (1/2)^n$ di quel livello: dopo 5 emivite circa il 97%, cioè in pratica lo steady state.



BOZZA - DRAFT

16.14 L'intensità sonora, i logaritmi e i decibel[51]

In farmacia misuriamo l'udito... capendo l'intensità sonora.

L'intensità sonora in decibel è definita con un logaritmo decimale, in dipendenza dall'energia sonora, e una serie di calcoli porta a concludere che

ad un raddoppio dell'energia corrisponde un aumento di ≈ 3 decibel (11)

Il 3 viene, coi calcoli, dallo 0.3 dell'approssimazione di lg2.

È l'unica cosa che ci proponiamo di imparare di questo(11) argomento.

BOZZA - DRAFT

[11] Per il Lettore interessato: l'intensità sonora in decibel è definita sostanzialmente come

$$\text{intensità sonora} := 10\Big(\lg \frac{\text{energia passante in 1 s per 1 m}^2}{\text{una prefissata energia passante in 1 s per 1 m}^2}\Big)\, dB$$

dove la prefissata energia passante in 1 s per un m^2 è la (piccolissima) $1pW/m^2$.
(L'argomento dei logaritmi e degli esponenziali è sempre adimensionale, cioè un numero puro, senza unità di misura: non esiste il logaritmo di 3 metri o 4 secondi).
Allora come funzione dell'energia è del tipo

$$a \lg \frac{x}{c} \quad = a\,(\lg x - \lg c) \quad = a \lg x + d \quad (\text{con } d := -a \lg c)$$

(e si faccia ben attenzione a distinguere la soprastante scrittura dalla $a \lg(x+d)$). Il grafico è proprio come quello di $\lg x$, riscalato da a sull'asse delle ordinate e traslato verticalmente di d.

16.15 Complementi – Il piombo nelle ossa

Il piombo nelle ossa ha un'emivita – supponiamo esponenziale il suo scomparire, com'è ragionevole in questi casi – di (circa) 10 anni. In quanto tempo si riduce del 75%? E del 90%? E del 95%? E del 97%?

La riduzione <u>del</u> 75% è la riduzione <u>al</u> 25%, cioè ai $\frac{25}{100}$ ovvero $\frac{1}{4}$ e allora corrisponde a 2 dimezzamenti: allora ci vogliono 20 anni.
Per il 90% è meno immediato.

Calcoliamo di quanti decibel aumenta l'intensità sonora raddoppiando l'energia.

Detta E l'energia considerata e $2\,E$ il suo doppio, si ha

$$\text{intensità_sonora}(2E) - \text{intensità_sonora}(E) =$$

$$= 10\ \lg \frac{2\,E}{1pW/m^2} - 10\ \lg \frac{E}{1pW/m^2} =$$

ricordando che $\lg(x/y) = \lg x - \lg y$

$$= 10 \left(\lg(2\,E) - \lg E \right) = \quad (\text{mentre } \lg(1pW/m^2) \text{ si elide})$$

$$= 10\ \lg \frac{2\,E}{E} = 10\ \lg 2 \approx 10 \cdot 0.3 = 3$$

cioè quanto detto: ad un raddoppio dell'energia corrisponde un aumento di ≈ 3 decibel.

BOZZA - DRAFT

Illustriamo una famiglia (insieme) di funzioni con l'esponenziale, che ricorre amplissimamente nelle Scienze Applicate, ed è espressa dai vari Autori in 2 modi diversi, con una costante negativa (che qua sarà k) oppure con una costante positiva (che qua sarà r) preceduta dal segno meno:

$$u(t) = u_0\,\mathrm{e}^{k\,t} \quad \text{essendo } u_0 = u(0) \qquad k < 0$$

$$u(t) = u_0\,\mathrm{e}^{-r\,t} \quad \text{essendo } u_0 = u(0) \qquad r > 0$$

e la costante k ovvero r dipende da caso a caso.
Questa è l'equazione che esprime in funzione del tempo la concentrazione di piombo, che si attenua; e un'infinità di altri fenomeni.
Nella figura B, a destra, si vedono 4 casi, con diversi valori di u_0 e r:

(rosso) $\mathrm{e}^{-2\,x}$
(magenta) e^{-x}
(nero) $2\,\mathrm{e}^{-2\,x}$
(blu) $2\,\mathrm{e}^{-x}$

E in questo caso possiamo calcolare la costante r dall'emivita di 10

BOZZA - DRAFT

anni:

$$u(emivita) =^{DEF} \frac{u(0)}{2} =^{EQ} u(0)\,\mathrm{e}^{-r\,10\,anni} \quad \Big/ : u(0)$$

$$\frac{1}{2} = \mathrm{e}^{-r\,10\,anni} \quad \Big/ \ln$$

$$\ln\frac{1}{2} = -r\,10\,anni$$

$$-\ln 2 = -r\,10\,anni \quad \Big/ : (-10\,anni)$$

$$r = \frac{\ln 2}{10\,anni}$$

ottenendosi così l'equazione dello scomparire del piombo nelle ossa

$$u(t) = u_0\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}t} \text{ essendo } u_0 = u(0)$$

Ora ci si chiede quando sarà ridotto del 90% ovvero al 10%, cioè $u(t) = 0.1\,u(0)$:

$$0.1\,u(0) =^{EQ} = u(0)\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}t} \quad \Big/ : u(0)$$

BOZZA - DRAFT

$$0.1 = \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t} \quad \Big/ \lg$$

$$-1 = \lg \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t}$$

$$-1 = -\frac{\ln 2}{10\,anni}\,t\,\lg \mathrm{e}$$

$$t = \frac{10\,anni}{\lg \mathrm{e} \cdot \ln 2} \approx \frac{10\,anni}{\lg \mathrm{e} \cdot \frac{\lg 2}{\lg \mathrm{e}}} = \frac{10\,anni}{\lg 2} \approx \frac{10\,anni}{0.3}$$

≈ 33.3 anni (valore che, nella pratica, possiamo stare sicuri che verrà riportato come 33 anni).

Si risolvano gli altri quesiti posti associatamente a questo appena risolto. Con 95% si dovrà calcolare $\lg 0.05 = \lg\left(\frac{1}{2} \cdot 0.1\right) = \lg \frac{1}{2} + \lg \frac{1}{10} = -\lg 2 - \lg 10 \approx -0.3 - 1 = -1.3$.

BOZZA - DRAFT

16.16 Complementi – Equazioni con LOG e x libera

Questione interessante è quella delle equazioni in cui compare un LOG(x) e anche una x fuori dai logaritmi. Per esempio per

$$1 - \lg x - x = 0$$

si può fare

$$1 - x = \lg x$$

e poi risolvere per via grafica il sistema

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ y = \lg x \end{cases}$$

Ma questo tipo di equazioni possono diventare più complicate, per esempio

$$2 - \lg x - x = 0$$

La risoluzione di quest'equazione richiede l'uso di una *funzione speciale dell'analisi matematica*.

BOZZA - DRAFT

Precisamente la funzione W di Lambert, e in casi più complessi nemmeno quella basta.

Su questa funzione lo scrivente ci ha passato un bel po' di vita, e si trovano in rete articoli scientifici cercando il cognome e Lambert e function.

BOZZA - DRAFT

16.17 Complementi – Fibonacci ed esponenziali

La successione di Fibonacci, che modellizza l'espansione almeno – nelle fasi iniziali – di una popolazione animale o microbica, e le epidemie, è sì definita per ricorrenza (e solo su $\mathbb{N}$) ma è approssimata con una funzione esponenziale in base φ, la sezione aurea:

$$a_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n \text{ per } n \text{ sufficientemente grande} \qquad (12)$$

per esempio $a_{10} = 55 \approx 55.0036$.
Dopo quanti mesi (se n indicia i mesi) la popolazione raggiunge il

valore $135\,301\,852\,344\,706\,746\,049$, oppure anzi, uscendo dall'esattezza ideale del problema, un valore $1.35 \cdot 10^{20}$?

Abbiamo l'equazione approssimata

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\,\varphi^n \approx 1.35 \cdot 10^{20} \qquad \Big/ \lg$$

$$\lg \frac{1}{\sqrt{5}} + n\,\lg \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx \lg(1.35 \cdot 10^{20}) \qquad \Big/ + \lg\sqrt{5}$$

$$n\,\lg \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx \lg(1.35 \cdot 10^{20}) + \lg\sqrt{5} \qquad \Big/ : \lg \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$n \approx \frac{\lg(1.35 \cdot 10^{20}) + \lg\sqrt{5}}{\lg \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$\approx \frac{\lg(1.35 \cdot 10^{20}) + \lg 2.23607}{\lg 1.61803}$$

e insomma ci servono i valori (approssimati) dei logaritmi decimali di 3 numeri (fra 1 e 10).

BOZZA - DRAFT

Con l'approssimazione prima vista si ha

$$n \approx \frac{20 + 0.130 + 0.35054}{0.2089} \approx 98.04$$

e calcolando con pazienza si troverà che il 98-esimo numero di Fibonacci è proprio $135\,301\,852\,344\,706\,746\,049$. (Oppure con WolframAlpha: `Fibonacci[98]`).

Nella figura a sinistra si vedono:

(blu) la successione (n, a_n) essendo a_n la successione di Fibonacci
(verde) $\frac{1}{\sqrt{5}}\,\varphi^x$
(magenta) e^x
(nero) 10^x

BOZZA - DRAFT

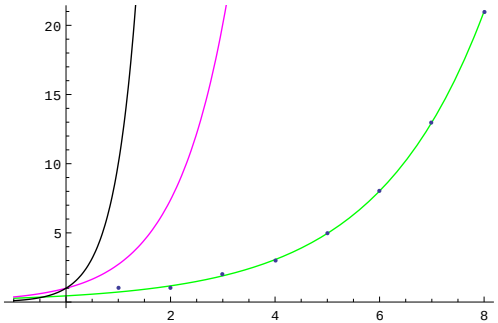


Figura A

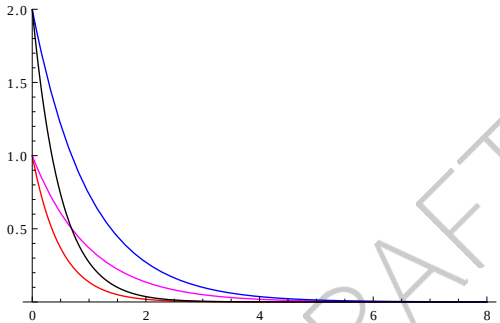


Figura B

BOZZA - DRAFT

Nella figura B, a destra, si vedono grafici di funzioni del tipo $a\,\mathrm{e}^{ct}$: questo tipo di funzioni internazionalmente vengono talvolta chiamate impropriamente *exponential functions* anche se $a \neq 1$.

16.18 ESERCIZI SULLA LEZIONE 16[55]

16.18.1 Esercizio risolto a – Risoluzione per via grafica

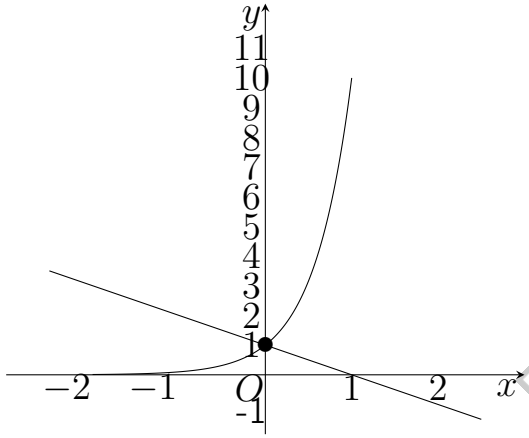
$_{\mu 2024}$ $*$ Risolvere per via grafica il sistema di equazioni

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ y = 10^x \end{cases}$$

(dando la soluzione nella forma $x = ...$, $y = ...$).

SVOLGIMENTO

BOZZA - DRAFT



Già bastano questi pochi (valori delle coordinate di) punti dei 2 grafici

x	$1-x$
-2	3
-1	2
0	1
1	0
2	-1

BOZZA - DRAFT

x	10^x
-2	$\frac{1}{100}$
-1	$\frac{1}{10}$
0	1
1	10

e disegnando (vedi figura) sullo stesso piano cartesiano grafici (approssimativi), vediamo subito che c'è un punto di intersezione $(0, 1)$, e non esistono altri per le proprietà elementari delle funzioni $1 - x$ e 10^x, e allora la soluzione del sistema di equazioni è data dalle coordinate x e y dell'unico punto di intersezione dei grafici:

$$\boxed{x = 0,\ y = 1}$$

BOZZA - DRAFT

16.18.2 Esercizio risolto b – Equazione con logaritmi decimali

$\mu 2018 \neq$
$\approx$ Si risolva l'equazione

$$\log_{10} \frac{x^2}{x^2 + 10} + \log_{10} \frac{x^2 + 10}{10^2} = 1$$

SVOLGIMENTO

Prima di tutto osserviamo che deve essere

$$\underline{x \neq 0}$$

(altrimenti si avrebbe l'inesistente $\log_{10} 0$). (Altre condizioni da richiedere non ci sono perché per $x \neq 0$ gli argomenti dei logaritmi sono entrambi evidentemente positivi).
Ricordando che la somma dei logaritmi (in una stessa base) è il logaritmo (in quella stessa base) del prodotto, si ha

$$\log_{10}\left(\frac{x^2}{x^2+10}\cdot\frac{x^2+10}{10^2}\right)=1$$

e semplificando

$$\log_{10}\frac{x^2}{10^2}=1 \quad \Big/\, 10^{\wedge} \quad \leftarrow \textit{potenza in base } 10\textit{; elimina il logaritmo in base } 10$$

$$\frac{x^2}{10^2}=10^1 \quad \Big/\cdot 10^2$$

$$x^2=10^2\cdot 10^1$$

$$x=\pm\sqrt{10^2\cdot 10}=\pm\sqrt{10^2}\,\sqrt{10}$$

e in conclusione (senza che la condizione $x \neq 0$ ci faccia escludere qualche valore)

BOZZA - DRAFT

$$\boxed{x \approx \pm 31.623}$$

oppure con un decimale in meno

$$\boxed{x \approx \pm 31.62}$$

16.18.3 Esercizio risolto c – Equazione con ln e lg

$\overset{\mu}{\approx}$
Risolvere

$$\lg \ln x^2 = 0$$

SVOLGIMENTO

Verrà usato lo standard della virgola decimale. (Ma si potrebbe usare quello del punto decimale, a scelta).

$$\lg \ln x^2 = 0 \quad \Big/ 10^{\wedge}$$

(passaggio che non introduce soluzioni spurie ovvero fittizie)

$$\ln x^2 = 10^0$$

BOZZA - DRAFT

$$\ln x^2 = 1 \quad \Big/ \exp$$

(passaggio che non introduce soluzioni spurie ovvero fittizie)

$$x^2 = \mathrm{e}$$

$$x = \pm\sqrt{\mathrm{e}}$$

e ricordando che $\mathrm{e} \approx 2{,}718$

$$\boxed{\approx \pm 1{,}649}$$

Nota 1. In qualche equazione coi logaritmi per così dire "capricciosa" può capitare che qualche passaggio incauto introduca soluzioni spurie ovvero fittizie, che assolutamente non sono soluzioni ma sembrano esserlo. Per esempio con questi passaggi

$$\lg x + \lg(2\,x) = 0$$

$$\lg(x \cdot 2 \cdot x) = 0$$

$$\lg(2\,x^2) = 0 \quad \Rightarrow 2\,x^2 = 1 \quad \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

BOZZA - DRAFT

troviamo una soluzione spuria ovvero fittizia negativa che assolutamente non è soluzione dell'equazione iniziale perché $\lg$ non esiste per argomenti negativi. Ma i passaggi svolti per risolvere l'esercizio iniziale, $\lg \ln x^2 = 0$, sono di quelli "sicuri", che non introducono soluzioni spurie ovvero fittizie.

Nota 2. Non è una buona idea cercare di risolvere l'equazione con la proprietà del logaritmo della potenza

$$(\forall\, \alpha \in \mathbb{R})(\forall\, x > 0)\, \mathsf{LOG}(x^\alpha) = \alpha\, \mathsf{LOG}(x)$$

(ove LOG indica 2 volte 1 stesso logaritmo in qualunque base) perché essa, come si vede scritto, vale per $x > 0$, e di fatto, incautamente applicandola in questo esercizio, fa perdere la soluzione negativa. (Per x negativo la formula $\mathsf{LOG}(x^\alpha) = \alpha\, \mathsf{LOG}(x)$ non ha senso).
Piuttosto, si potrebbe applicare la proprietà degli esponenti pari, aggiungendo il valore assoluto.

ESERCIZIO$_{\mu 2020}$

$*\approx$ Risolvere l'equazione

$$\mathrm{e}^{2\,x^3} - \mathrm{e}^{2\,\lg^6(2\lg 100)} = 0$$

SVOLGIMENTO

Ovviamente $\lg 100 = 2$

$$\mathrm{e}^{2\,x^3} = \mathrm{e}^{2\,\lg^6(2\cdot 2)} \quad \Big/\ \ln$$

BOZZA - DRAFT

$$2\,x^3 = 2\,\lg^6 4 \quad \Big/ : 2$$

$$x^3 = \lg^6 4 \quad \Big/ \sqrt[3]{\cdot}$$

$$x = \lg^2 4 =$$

che è la soluzione esatta, e infine con le proprietà dei logaritmi e la nota approssimazione $\lg 2 \approx 0{,}3$

$$= \lg^2 2^2 = (\lg 2^2)^2 = (2\,\lg 2)^2 \approx (2 \cdot 0{,}3)^2 = 0{,}6^2 = 0{,}36$$

$$\boxed{\lg^2 4 \approx 0{,}36}$$

(Un valore più preciso è $0{,}3625$, come si può verificare per esempio online su WolframAlpha con `Log[10,4]^2`).

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

$*$ Si risolva quest'equazione:

$$\log_{10} x + \log_{10} 200 - \log_{10}(1 + x^2) = \log_3 9$$

SVOLGIMENTO

Prima di tutto osserviamo che dev'essere

BOZZA - DRAFT

$$\underline{x > 0}$$

perché x è argomento di un logaritmo. (Ovviamente $1 + x^2 > 0$ sempre). Ricordando le $\log_b u + \log_b v = \log_b(u\,v)$ e $\log_b u - \log_b v = \log_b \frac{u}{v}$ e $3^2 = 9$

$$\log_{10} \frac{x \cdot 200}{1 + x^2} = 2 \qquad \Big/ 10^{\wedge} \quad \leftarrow \textit{potenza in base } 10\textit{; elimina il logaritmo in base } 10$$

$$\frac{200\,x}{1 + x^2} = 100 \qquad \Big/ \cdot \frac{1 + x^2}{100}$$

$$2\,x = 1 + x^2$$

$$x^2 - 2\,x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$\boxed{x = 1}$$

(Che è > 0).

ESERCIZIO $_{\mu}$

$*\approx$ Risolvere l'equazione $4\lg(100\,x) = 9$.

SVOLGIMENTO

$$4\lg(100\,x) = 9 \qquad \Big/ : 4$$

BOZZA - DRAFT

$$\lg(100\,x) = \frac{9}{4}$$

e per la proprietà del logaritmo del prodotto

$$\lg 100 + \lg x = \frac{9}{4}$$

$$\lg 10^2 + \lg x = \frac{9}{4}$$

$$2 + \lg x = \frac{9}{4}$$

$$\lg x = \frac{9}{4} - 2$$

$$\lg x = \frac{9-8}{4}$$

$$\lg x = \frac{1}{4} \quad \Big/ 10^{\wedge}$$

$$x = 10^{\frac{1}{4}}$$

ovvero

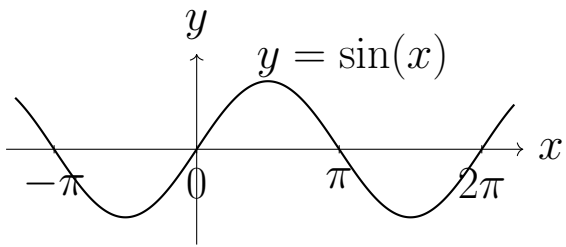
$$\boxed{\sqrt[4]{10} \approx 1{,}778\,28}$$

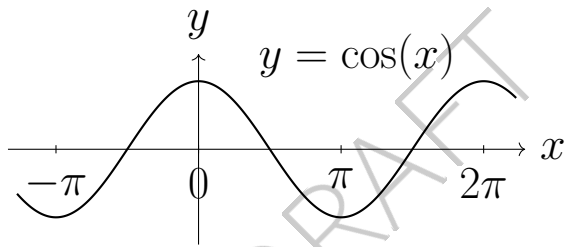
BOZZA - DRAFT

(La radice quarta si calcola con la calcolatrice come radice quadrata della radice quadrata: $\sqrt[4]{z} = \sqrt{\sqrt{z}}$)

BOZZA - DRAFT

17 Funzioni trigonometriche





BOZZA - DRAFT

17.1 Introduzione alle funzioni seno e coseno[58]

Le funzioni goniometriche, ovvero trigonometriche, e in particolare le funzioni $\sin(x)$ e $\cos(x)$, hanno una presenza estremamente rilevante in Scienze Applicate come la Fisica, e una presenza più occasionale o nascosta nelle Scienze della Farmacia.

Una delle applicazioni più importanti, sebbene poco visibile all'utente finale, è l'elaborazione digitale delle immagini, comprese quelle di tipo medico, dove tali funzioni sono incorporate all'interno degli algoritmi.

Il grafico di $\sin$ si chiama sinusoide;
il grafico di $\cos$ si chiama cosinusoide;
ma la distinzione non è veramente intrinseca per motivi[12] basati sul fatto che sono l'una traslata dell'altra:

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \tag{13}$$

Le funzioni "gemelle" seno e coseno sono strettamente collegate in particolare:

- alle rotazioni
- alle oscillazioni.

BOZZA - DRAFT

[12] La distinzione fra sinusoidi e cosinusoidi non è intrinseca perché gli stessi nomi di sinusoide e cosinusoide si applicano anche dopo cambi di scala

$$\cos \to a\ \cos$$
$$\sin \to b\ \sin$$

e traslazioni

$$x \to x + \alpha$$
$$x \to x + \beta$$

e

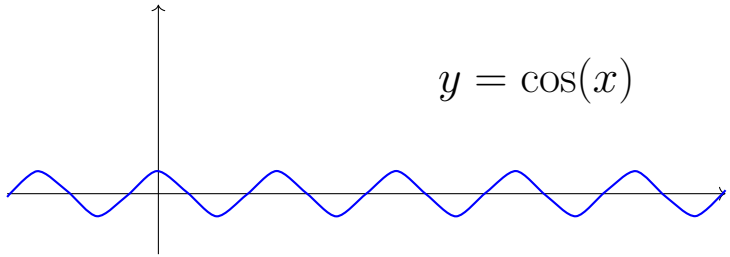
$$a\ \cos(x + \alpha) \quad \text{e} \quad b\ \sin(x + \beta)$$

danno lo stesso insieme di curve e in particolare seno e coseno sono l'una "traslata" dell'altra.

Esistono due rotazioni fondamentali che influenzano in modo determinante la vita dell'essere umano, fino a costituirne una base biologica e sociale:

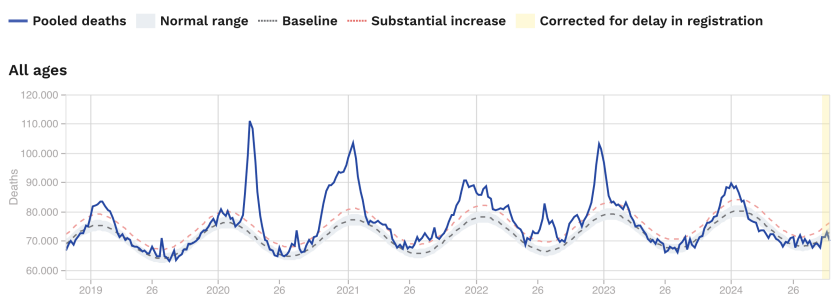
- la rotazione della Terra su sé stessa, che origina l'alternanza di giorno e notte, alla quale sono associati numerosi fenomeni fisiologici (*ritmi circadiani*) e sociali;
-
- la rotazione della Terra (approssimativamente) intorno al Sole, che, per l'inclinazione dell'asse terrestre, origina le stagioni, con un forte influsso sulla mortalità nelle regioni temperate, come l'Italia, dove essa risulta più elevata in inverno e più bassa in estate.

BOZZA - DRAFT

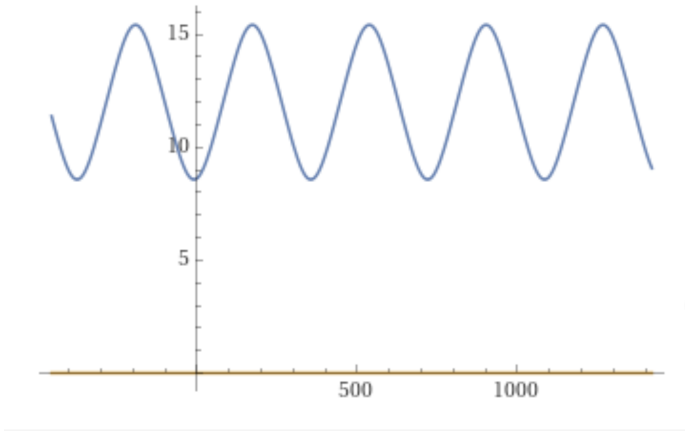


BOZZA - DRAFT

Nel sito EuroMOMO, che raccoglie statistiche sugli eccessi di mortalità in numerosi Stati europei, la cosiddetta baseline — cioè il numero di morti attesi sulla base degli anni precedenti — mostra un'oscillazione stagionale marcata, con valori più elevati nella stagione fredda e più bassi in quella calda, in modo qualitativamente affine a una cosinusoide.



Un andamento analogo si osserva nella durata delle ore di luce solare alla latitudine di 45°, che varia ciclicamente nel corso dell'anno, mostrando una stretta correlazione temporale con la mortalità stagionale.



BOZZA - DRAFT

In Europa, infatti, la mortalità è mediamente più elevata nei mesi invernali (intorno a gennaio) e più bassa in quelli estivi (intorno ad agosto), per diverse ragioni conseguenti al diminuito irraggiamento solare a terra – per la composizione delle 2 rotazioni della Terra di cui si diceva prima, quella giornaliera e quella annuale, e per l'inclinazione dell'asse terrestre – tra cui:

- temperature più basse, favorenti alcune patologie;
- la ridotta sintesi di vitamina D nell'organismo umano.

Analizzando nel dettaglio i dati EuroMOMO relativi ai 27 Stati considerati nel 2024, si osservano circa $80\,000$ decessi settimanali nei mesi di gennaio e circa $68\,000$ nei mesi di luglio, a fronte di una media annua di circa $74\,000$ decessi settimanali, con un'oscillazione dell'ordine di $\pm 6\,000$.

La baseline della mortalità settimanale è più o meno una cosinusoide così fatta: morti=...+...×cos(...×t+...) e i puntini sono costanti. (13)

Il lettore interessato apprezzerà:

$$M(t) = M_0 + M_1 \cos\left(\frac{2\pi}{52}\, t + \phi\right)$$

con le costanti spiegate in nota.

BOZZA - DRAFT

13

- $M(t)$ è il numero atteso di decessi settimanali al tempo t;
- M_0 è il valore medio annuo della mortalità settimanale;
- M_1 è l'ampiezza dell'oscillazione stagionale della mortalità;
- $\omega = \frac{2\pi}{52}$ è la frequenza angolare associata al periodo annuale;

Le nostre vite, con l'alternarsi del giorno e della notte (ovvero, meglio, dell'altezza del Sole sull'orizzonte, determinata dalla rotazione della Terra sul suo asse) e l'alternarsi delle stagioni (determinate dalla Rotazione della Terra intorno – approssimativamente – al Sole), e perfino la mortalità generale, viaggiano su sinusoidi ovvero equivalentemente cosinusoidi, con non banali formule.

In conclusione, possiamo dire che le funzioni goniometriche ovvero trigonometriche hanno numerose e importanti ricorrenze nelle Scienze della Farmacia, ma in generale:
– indirette attraverso la Fisica o più raramente la Chimica;
– o alquanto nascoste sotto la superficie apparente al Farmacista;
– oppure occasionali, in settori di nicchia.

BOZZA DRAFT

- ϕ è lo sfasamento di fase, che rappresenta il ritardo (o anticipo) della risposta biologica e climatica rispetto alla forzante astronomica;
- t è il tempo, misurato in settimane, poi nel calcolo reso adimensionale dalla costante per la quale è moltiplicato.

17.2 Definizioni[02]

Nel piano cartesiano di assi X, Y e origine O consideriamo il *circolo goniometrico* che è il circolo di centro O e raggio 1.

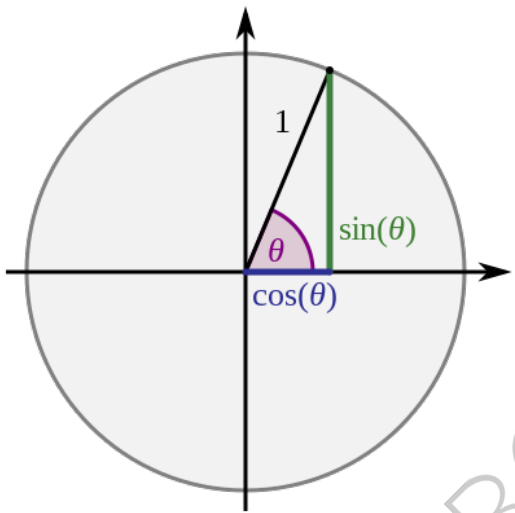


Figura 1: Il circolo goniometrico. Wikimedia, public domain image, by Stephan Kulla (2017)

La lettera greca θ, spesso usata come misura di angoli, come nella soprastante figura, è la *theta*, traslitterata *th*. È la lettera di *arithmos*, il numero, della citazione pitagorica all'inizio della Lezione 1, che ritroviamo nelle parole inglesi *arithmetic* e *logarithm*.

Non confondere fra loro seno e coseno.
Il coseno è "disteso", sta orizzontale, per così dire.
(In realtà no, perché è un numero, però è orizzontale il segmento orientato la cui misura con segno è il coseno).

BOZZA - DRAFT

Consideriamo un arco (del circolo) che inizia in $(1, 0)$ procedendo in senso antiorario. Esso determina un *angolo goniometrico* di vertice O. La lunghezza x dell'arco si dice *misura in radianti* dell'*angolo goniometrico*. E si possono considerare misure negative con archi orientati in senso orario. Chiamiamo $P(x)$ il secondo estremo dell'arco. La misura in radianti a priori $\in [-2\pi, 2\pi]$, e poi in effetti *facendo anche più di 1 giro*, $x \in \mathbb{R}$. Si definiscono le funzioni *seno* e *coseno*, $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e la *tangente*:

$$\cos(x) := ascissa(P(x)) \tag{14}$$

$$\sin(x) := ordinata(P(x)) \tag{15}$$

e la tangente è l'ordinata del punto d'intersezione della retta $OP(x)$ con la retta tangente al circolo goniometrico in $(1, 0)$.

BOZZA - DRAFT

Per esempio si ha (banalmente le prime 2, difficilmente la terza)

$$\sin \pi = 0 \qquad \cos \pi = -1 \qquad \sin 1 \approx 0.84 \tag{16}$$

17.3 Grafici e formule principali[05]

Si noti che per piccoli x è $\sin x \approx x$ e in particolare $\sin 0 = 0$.

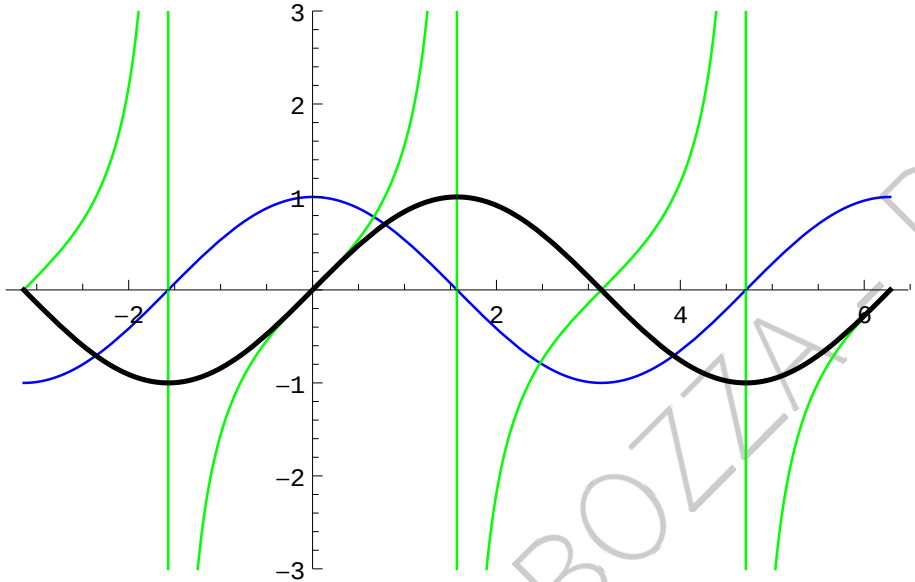


Figura 2: (nero) sinusoide, (blu) cosinusoide, (verde) tangentoide e suoi asintoti

La relazione $\sin x \approx x$ per x piccolo in valore assoluto, che è di fondamentale importanza in Fisica, ci permette di ricordare facilmente che

$$\sin 0 = 0,$$

questione su cui ritorneremo.

Si noti anche che in quello stesso $x = 0$ il coseno vale 1

$$\cos 0 = 1,$$

altra questione su cui ritorneremo.

BOZZA DRAFT

– Il seno e il coseno sono funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$.

– Seno e coseno sono legate[14] anche dall'**identità goniometrica fondamentale:**

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1} \tag{17}$$

– Da esse si definisce una terza funzione, la tangente:

$$\boxed{\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}} \tag{18}$$

$$\boxed{\text{ma solo per } x \text{ che non sia multiplo dispari di } \frac{\pi}{2}} \tag{19}$$

$$\boxed{\text{ovvero, analiticamente, per } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}} \tag{20}$$

e scelga il Lettore quale di queste 2 versioni imparare.

BOZZA - DRAFT

[14] Questa è chiaramente una relazione *algebrica* fra seno e coseno, mentre la (13) è un'identità funzionale.

17.4 Altre formule[09]

$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$	$k \in \mathbb{Z}$	Sono
$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$	$k \in \mathbb{Z}$	tutte
$\tan(x + k\pi) = \tan(x)$	$k \in \mathbb{Z}$	periodiche

(21)

$\sin(-x) = -\sin x$	il seno è dispari
$\cos(-x) = \cos x$	il coseno è pari
$\tan(-x) = -\tan x$	la tangente è dispari

(22)

BOZZA - DRAFT

– Formula di addizione del seno:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \tag{23}$$

– Da quest'ultima con $y = x$ segue la formula di duplicazione del seno:

$$\sin(2\,x) = 2\,\sin x\,\cos x \tag{24}$$

– Formula di addizione del coseno:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

– Da quest'ultima con $y = x$ segue una formula di duplicazione del coseno:

$$\cos 2\,x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

– Da quest'ultima e dall'identità goniometrica fondamentale segue quest'altra formula di duplicazione del coseno:

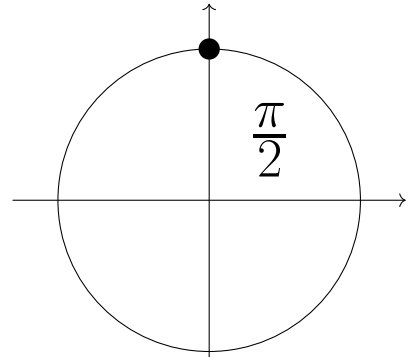
$$\cos(2\,x) = 2\,\cos^2 x - 1 \tag{25}$$

– In $\frac{\pi}{4}$ seno e coseno hanno questo stesso valore:

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{26}$$

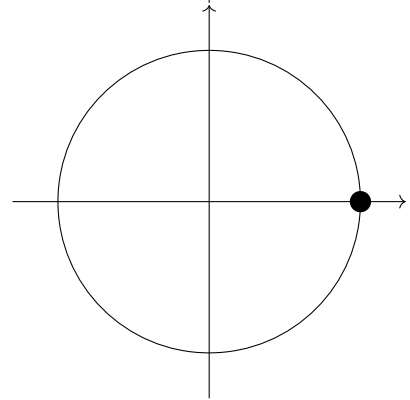
BOZZA - DRAFT

– Da quest'ultima, applicando le formule di duplicazione si ottengono i valori di seno e coseno in $\frac{\pi}{2}$, poi in π, poi in $2\,\pi$:



$$\boxed{\sin\tfrac{\pi}{2} = 1 \qquad \cos\tfrac{\pi}{2} = 0} \tag{27}$$

$$\sin\pi = 0 \quad \cos\pi = -1 \qquad \sin 2\,\pi = 0 \quad \cos 2\,\pi = 1 \tag{28}$$



e da quest'ultima per la $2\,\pi$-periodicità

$$\boxed{\sin 0 = 0 \qquad \cos 0 = 1} \tag{29}$$

BOZZA - DRAFT

17.5 Gradi e radianti[12]

In questa trattazione considereremo il seno e il coseno quasi solo per $0 \leq x \leq \pi$ e la tangente principalmente per $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.
La misura dell'angolo piatto di π radianti, in un altro sistema di misura – più antico – si dice di $180°$, e vale la proporzione

$$\pi_{rad} : 180° = x_{rad} : x° \tag{30}$$

che consente di passare da un sistema all'altro. In particolare

angolo giro	$360°$	$2\,\pi$ radianti
angolo piatto	$180°$	π radianti
angolo retto	$90°$	$\frac{\pi}{2}$ radianti

(31)

BOZZA - DRAFT

Ecco alcuni degli *angoli notevoli* che si considerano a un livello molto elementare:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$x°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$	$270°$	$360°$

e un qualche interesse ha anche 1 rad $\approx 57°$, e tutte queste corrispondenze si calcolano con la (30). Quasi mai[15] si scrive rad.

Primi e secondi. La metà di un angolo di $\pi/4$ radianti ha $\pi/8$ radianti. La metà di quello stesso angolo, espresso in gradi, cioè di $45°$, è $22.5°$ ma spesso si scrive diversamente: come

BOZZA - DRAFT

[15] Per il lettore interessato, alcuni valori numerici interessanti:

$\frac{\pi}{4} \approx 0.785$ (che di solito useremo nel senso di $\frac{\pi}{4}\, rad \approx 0.785\, rad$)
$\frac{\pi}{3} \approx 1.05$ (che di solito useremo nel senso di $\frac{\pi}{3}\, rad \approx 1.05\, rad$)
$\frac{\pi}{2} \approx 1.57$ (che di solito useremo nel senso di $\frac{\pi}{2}\, rad \approx 1.57\, rad$).
$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$ (per esempio $\cos \frac{\pi}{4}$)
$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$ (per esempio $\cos \frac{\pi}{3}$)
$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577$ (per esempio $\tan \frac{\pi}{6}$)

per 22 ore e mezza scriviamo $22^h30'$

cioè

si usano i 60 minuti primi che suddividono 1 ora, similmente

si usano i 60 primi (di grado) che suddividono 1 grado

così

per $22.5°$ (22 gradi e mezzo) si può anche scrivere $22° 30'$.

E ci sono anche 60 *secondi* in un *primo* (questione che non approfondiamo).

Le conversioni fra le 2 scritture delle misure in gradi

con le cifre decimali, come $22.5°$

coi primi e secondi, come $22° 30'$

è in generale calcolo difficile; ma in questo caso è stata semplice.

Si tratta esattamente degli stessi valori della *latitudine* e *longitudine*, altra questione che non approfondiamo; diamo solo a titolo di esempio le coordinate di Trieste: 45° 39' 01" N 13° 46' 13" E.

BOZZA - DRAFT

17.6 Esempio di conversione da radianti a gradi[16]

$_{\mu}$ Qual è la misura in gradi di un angolo di $\frac{2}{3}\pi$ radianti? (È l'angolo di legame del trifluoruro di boro BF_3).

SVOLGIMENTO

Sappiamo che $180°$ sono π radianti da cui la proporzione

$$\pi_{rad} : 180° = x_{rad} : x°$$

$$\pi_{rad} : 180° = \frac{2}{3}\pi_{rad} : x°$$

$$\frac{\pi_{rad}}{180°} = \frac{\frac{2}{3}\pi_{rad}}{x°} \quad \Big/ \cdot \frac{180° \cdot x°}{\pi_{rad}}$$

$$x° = \frac{2}{3} \cdot 180°$$

$$\boxed{120°}$$

BOZZA - DRAFT

17.7 Alcuni valori notevoli[19]

Impariamo a leggere questo diagramma, che, senza imparare a memoria niente, ci dà seni e coseni di molti *angoli notevoli*.

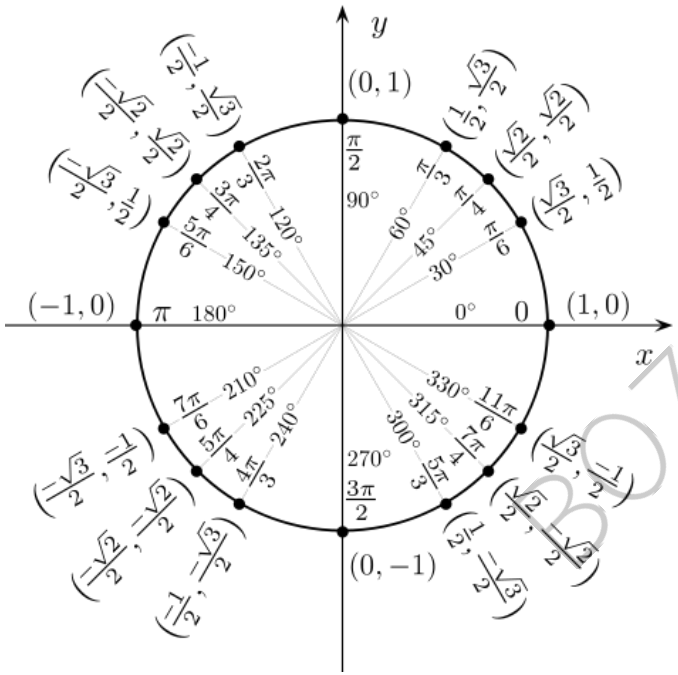


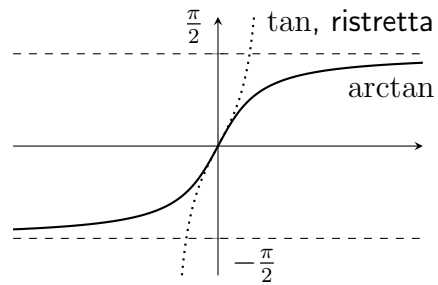
Figura 3: Angoli notevoli e corrispondenti valori di seno e coseno

BOZZA - DRAFT

17.8 Funzioni goniometriche inverse[22]

Definizione analitica di arcotangente.

arctan è l'inversa della restrizione della tangente a $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ (32)



$\arctan 0 = 0$

Si prenda allora il secondo arco curvilineo verde nella Figura 2 e lo si simmetrizzi rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, e si otterrà il grafico della funzione arcotangente, rappresentato nella figura a destra.

arctan di un numero grandissimo, diciamo 1000, vale poco meno di $\frac{\pi}{2}$ cioè circa 1.57

In simboli:

$$\arctan := \left(\tan|_{]-\pi/2,\pi/2[}\right)^{-1}$$

Detto altrimenti,

$\arctan x$ **è l'angolo** α **la cui tangente è** x, $\quad \alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$.

BOZZA - DRAFT

17.9 Arcotangente e angolo di riposo delle polveri[26]

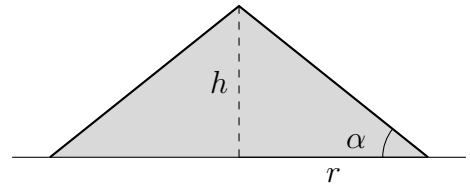
L'arcotangente lega cateti e angoli di un triangolo rettangolo:

$$\text{angolo opposto} = \arctan \frac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}} \tag{33}$$

$$\text{ovvero:} \quad \alpha = \arctan \frac{h}{r} \tag{34}$$

Una polvere per compresse o capsule deve scorrere bene nelle tramogge e riempire in modo uniforme stampi e capsule.
Un saggio semplice e ufficiale (Farmacopea Europea 2.9.36, USP <1174>) è la misura dell'*angolo di riposo*: si lascia cadere la polvere su una base piana, si forma un cono, se ne misurano altezza h e raggio r, e l'angolo è quello della formula.
Più l'angolo è piccolo, più la polvere scorre bene.

Polvere lasciata cadere da un imbuto: si forma un cono di altezza h e raggio di base r.



α	scorrevolezza
25°–30°	eccellente
31°–35°	buona
36°–40°	discreta
41°–45°	passabile
46°–55°	scarsa
56°–65°	molto scarsa
$> 66°$	pessima

BOZZA - DRAFT

17.10 Complementi – Esercizio sull'angolo di riposo

$*$ Una polvere forma un cono alto 2 cm con raggio di base 2.5 cm. Calcolando l'angolo di riposo con una calcolatrice scientifica, classificare la scorrevolezza secondo la tabella del paragrafo precedente.

SVOLGIMENTO

$$\alpha = \arctan \frac{2}{2.5} = \arctan 0.8 \approx 0.675 \text{ rad}$$

e con la proporzione (30)

$$x^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot 0.675 \approx 38.7^\circ$$

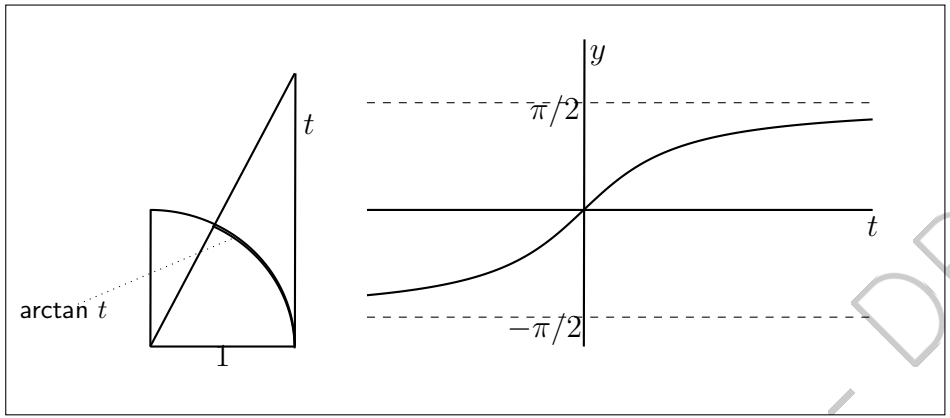
$$\alpha \approx 38.7^\circ$$

scorrevolezza discreta

Con WolframAlpha: `arctan(2/2.5) in degrees`.

BOZZA - DRAFT

17.11 Complementi – Definizione geometrica di arctan



Qua definiremo arctan senza usare tan.
Con riferimento alla figura a sinistra, si chiama arcotangente di $t > 0$ la lunghezza dell'arco di circolo intersezione del quarto di circolo col triangolo rettangolo (pieno) di cateti 1 e t.
Per $t < 0$ si pone

$$\arctan(-t) = -\arctan t$$

e ancora si pone

$$\arctan 0 = 0$$

Al variare di t in $\mathbb{R}$ si ottiene così la funzione arcotangente, di cui si vede in figura un disegno (di una parte) del grafico.

BOZZA - DRAFT

17.12 Proprietà dell'arcotangente[29]

Teorema. (Ovvio)
(a) arctan è dispari:

$$\boxed{\arctan(-x) = -\arctan(x)} \tag{35}$$

(b) arctan è crescente;
(c) "$\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$", come limite, valore mai raggiunto;
(d) "$\arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$", come limite, valore mai raggiunto;
(e) arctan ha grafico sigmoide.

Teorema. (Di difficile dimostrazione)
(f) arctan non è nè funzione razionale nè irrazionale irrazionale (tecnicamente si dice funzione *trascendente*, come anche sono i *logaritmi*);
(g) arctan ha grafico senza *punti angolosi*, dotato di *retta tangente* in ogni punto (funzione *derivabile*).

BOZZA - DRAFT

17.13 Simboli dell'arcotangente e funzioni affini[33]

Senza voler qua memorizzare nulla osserviamo comunque che l'arcotangente è molto variamente denotata dai vari Autori e software.
In particolare

arctan (che è lo standard ISO)

$\tan^{-1}$ (compatibile con lo standard ISO)

E ancora

arctang, arctg, `ArcTan, Atn, atg, atan (e datan), rad(atan(.))`...
(Non è la funzione `atan2`, comunque correlata).

Definizioni (che non diamo). Similmente all'arcotangente, vi sono poi anche[16] l'arcoseno (arcsin) e l'arcocoseno (arccos).

BOZZA - DRAFT

---

[16] **Arcoseno:**
$\arcsin x$ è l'angolo α il cui seno è x, con $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Arcocoseno:
$\arccos x$ è l'angolo α il cui coseno è x, con $\alpha \in [0, \pi]$.
In simboli:

$$\arcsin := \left(\sin|_{[-\pi/2,\pi/2]} \right)^{-1}$$

$$\arccos := \left(\cos|_{[0,\pi]} \right)^{-1}$$

Angoli di legame della Chimica.
Senza voler qua memorizzare nulla osserviamo che le funzioni trigonometriche governano, in modi complessi che non trattiamo, gli angoli di legame della Chimica. Per esempio l'angolo fra i legami del metano vale

$$\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$$

radianti, ovvero anche

$$\pi - \arctan(2\sqrt{2})$$

radianti, che a conti fatti vale ≈ 1.910633 radianti che convertendo da radianti in gradi è $\approx 109°28'$.

Con WolframAlpha

```
arccos(-1/3)
```

dà

```
1.9106332...(eccetera, moltissimi decimali non qua riportati)
```

e poi

```
convert 1.910633 rad into degrees
```

dà

```
109.471° (degrees)

109 degrees 28 arc minutes 16 arc seconds
```

BOZZA - DRAFT

17.14 Complementi – Alcuni valori dell'arcotangente

Dalle definizioni si ha subito

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$
arctan	0		$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
arcsin	0	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	∄
arccos	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	∄

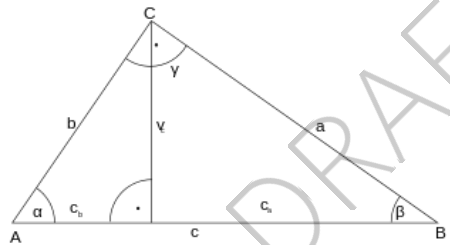
I valori mancanti in tabella non si considerano *valori notevoli*, ma esistono. (Per esempio $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.61548$).

Altri valori si ottengono dalla disparità dell'arcotangente (e dell'arcoseno).

BOZZA - DRAFT

17.15 Trigonometria – La goniometria dei triangoli[36]

In un triangolo rettangolo di lati a, b, c, con angoli rispettivamente opposti di misure α, β, $90°$ i lati di misure a e b si chiamano *cateti* e l'altro *ipotenusa*. Valgono (33) e (34) che espresse con tan invece di arctan adesso diventano



$$\frac{\text{cateto opposto}}{\text{cateto adiacente}} = \text{tangente(angolo opposto)} \qquad (36)$$

cioè $\frac{a}{b} = \tan\alpha$

e valgono anche: $a = c\,\sin\alpha$ $a = c\,\cos\beta$

Esistono innumerevoli altri teoremi e formule di Trigonometria.

BOZZA - DRAFT

17.16 I ritmi circadiani e il coseno[40]

Cronofarmacologia: l'effetto di un farmaco dipende dall'orario. Senza voler qua memorizzare nulla, osserviamo comunque che molte grandezze fisiologiche oscillano nelle 24 ore (la temperatura corporea, la pressione arteriosa, la concentrazione di cortisolo nel sangue...) e per descriverle si usa spesso questa formula detta modello del *cosinor*:

$$y(t) = M + A\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t + \phi\right) \tag{37}$$

- M si chiama *MESOR*: è il valore medio attorno a cui si oscilla;
- A è l'*ampiezza*: di quanto si sale e si scende rispetto alla media;
- ϕ si chiama *acrofase*: dice *quando* si raggiunge il massimo;
- τ è il periodo, di solito 24 ore.

È la stessa formula che abbiamo visto per la mortalità settimanale (con $\tau = 52$ settimane), applicata ora al giorno invece che all'anno.

Il metodo del cosinor fu introdotto da Franz Halberg, pioniere della cronobiologia, che coniò anche la parola *circadiano*: *circa diem*, «circa un giorno» (in latino).

BOZZA DRAFT

17.17 Polarimetria: il coseno per le chiralità[43]

Senza voler qua memorizzare nulla, osserviamo che questa formula

$$\boxed{I = I_0 \cos^2 \theta}$$

governa uno strumento della Farmacopea Europea, il[(17)] polarimetro.

Molte molecole di farmaci sono *chirali*: esistono in due forme, gli *enantiomeri*, l'una immagine speculare dell'altra, come la mano destra e la sinistra. Le due forme hanno quasi tutte le proprietà uguali, ma ruotano il piano della luce polarizzata in versi opposti.

Due enantiomeri possono avere effetti farmacologici diversi: per esempio, dell'ibuprofene è attivo soprattutto l'enantiomero (S).

Il *polarimetro* misura questo angolo di rotazione.
Una miscela al 50% dei due enantiomeri (*racemo*) non ruota la luce: le due rotazioni, uguali e opposte, si annullano.

BOZZA - DRAFT

[17] Saggio 2.2.7, *potere rotatorio*

17.18 Complementi – Dettagli tecnici sul polarimetro

La luce passa per un primo filtro polarizzatore, attraversa la soluzione, e poi un secondo filtro, l'*analizzatore*. L'intensità della luce che esce segue la formula (Legge di Malus) sopra scritta, dove θ è l'angolo fra la direzione di polarizzazione della luce e l'analizzatore. Qui I_0 è l'intensità della luce polarizzata che arriva all'analizzatore, e I quella che ne esce: il rapporto $I/I_0 = \cos^2\theta$ dice quale frazione di luce riesce a passare. Poiché $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, quando i due sono perpendicolari la luce si spegne: si ruota l'analizzatore fino al buio, e dall'angolo letto si ricava di quanto la sostanza ha ruotato la luce.

BOZZA - DRAFT

L'angolo misurato α dipende dalla lunghezza ℓ del tubo (in dm) e dalla concentrazione c (in g/mL); dividendo si ottiene il *potere rotatorio specifico*, caratteristico della sostanza:

$$[\alpha] = \frac{\alpha}{\ell\, c}$$

Per esempio per il saccarosio $[\alpha] \approx +66.5°$.

17.19 La legge di Bragg e il polimorfismo dei farmaci[47]

Senza voler qua memorizzare nulla, osserviamo che questa formula

$$n\,\lambda = 2\,d\,\sin\theta \tag{38}$$

governa la diffrazione di raggi X su polveri della[18] Farmacopea Europea.

Uno stesso principio attivo può cristallizzare in forme diverse, dette *polimorfi*: le molecole sono le stesse, ma impacchettate in modo diverso. Polimorfi diversi possono avere solubilità diversa, e quindi diversa biodisponibilità.

Per riconoscerli si usa la diffrazione di raggi X su polveri

Caso celebre: nel 1998 il ritonavir, antiretrovirale, cominciò a cristallizzare in una nuova forma, molto meno solubile, e il farmaco dovette essere riformulato.

Vari dettagli si trovano nei Complementi.

BOZZA - DRAFT

[18] Farmacopea Europea, saggio 2.9.33.

17.20 Complementi – Dettagli sulla legge di Bragg

Un fascio di raggi X colpisce la polvere e viene riflesso dai piani del cristallo solo a certi angoli, quelli che soddisfano la Legge di Bragg, espressa dalla formula (38), dove λ è la lunghezza d'onda dei raggi X, d la distanza fra piani del cristallo, θ l'angolo di incidenza, n un intero (di solito $n = 1$).
Ogni forma cristallina ha le sue distanze d, e quindi i suoi angoli: il *diffrattogramma*, con i picchi ai vari angoli, è una sorta di impronta digitale del polimorfo.

Si noti che per $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ il seno è crescente: a ogni distanza d corrisponde un solo angolo, che si ottiene con l'arcoseno,

$$\theta = \arcsin \frac{\lambda}{2\,d}.$$

Per ragioni sperimentali, nei diffrattogrammi si riporta di solito l'angolo 2θ invece di θ.

BOZZA - DRAFT



Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule *contemporaneamente* numerate *et* riquadrate, oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.
Non ci proponiamo di imparare a memoria nessun ALTRO valore di seno, coseno, tangente e arcotangente, ma solo di saperli ricavare disponendo di tabelle analoghe a quelle sopra esposte, oppure dalla Figura 17.7 o analoga.

BOZZA - DRAFT

* Complementi *

17.21 Complementi – Altre formule goniometriche

Formule di addizione e sottrazione:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad (vista\ prima)$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad (vista\ prima)$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

BOZZA - DRAFT

Formule di duplicazione:

$$\sin(2\,x) = 2\,\sin x\cos x \qquad (vista\ prima)$$

$$\cos(2\,x) = \begin{cases} 2\,\cos^2 x - 1 & (vista\ prima) \\ \cos^2 x - \sin^2 x & (vista\ prima) \\ 1 - 2\,\sin^2 x \end{cases}$$

$$\tan(2\,x) = \frac{2\,\tan(x)}{1-\tan^2 x}, \qquad x \neq \frac{\pi}{4} + k\,\frac{\pi}{2}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Formule di prostaferesi:

$$\sin x + \sin y = 2\,\sin\tfrac{x+y}{2}\,\cos\tfrac{x-y}{2}$$
$$\sin x - \sin y = 2\,\cos\tfrac{x+y}{2}\,\sin\tfrac{x-y}{2}$$
$$\cos x + \cos y = 2\,\cos\tfrac{x+y}{2}\,\cos\tfrac{x-y}{2}$$
$$\cos x - \cos y = -2\,\sin\tfrac{x+y}{2}\,\sin\tfrac{x-y}{2}$$

BOZZA - DRAFT

Formule di bisezione della tangente:

$$\tan\frac{x}{2} = \begin{cases} \frac{\sin x}{1+\cos x}, & x \neq (2\,k+1)\,\pi \\ \\ \frac{1-\cos x}{\sin x}, & x \neq k\,\pi \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Approssimazione del seno per piccoli valori dell'argomento:

$$\sin x \approx x \qquad |x| \ll$$

Esiste poi questa relazione *funzionale* fra seno e coseno:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

che si ottiene subito dalla (23) (ponendovi $y = \frac{\pi}{2}$).
Ed esiste una *relazione differenziale* fra seno e coseno, che esprimiamo a parole:
la retta tangente alla sinusoide nel punto di ascissa x ha coefficiente angolare $\cos x$
(e che in formule si esprime con $D \sin x = \cos x$ che spiegheremo

BOZZA - DRAFT

nella lezione sulle derivate).

Vi sono poi le *formule parametriche razionali*, e molte altre.

17.22 Complementi – Il calcolo di queste funzioni

Molti valori delle funzioni goniometriche si trovano nelle tavole che abbiamo dato in questa lezione. Numerosissimi altri valori si trovano in forma approssimata su tavole cartacee ora riprodotte su internet. Valori (approssimati) si calcolano con le calcolatrici scientifiche, reali o virtuali, e online con WolframAlpha.

Questione interessantissima – veramente di fondamentale importanza in Matematica – è come fanno i software a calcolare quei valori, e come fecero i nostri antenati nei secoli passati a calcolare i valori scritti nelle tavole cartacee.

BOZZA - DRAFT

Ebbene, quei valori (approssimati ma con quanti decimali esatti si voglia) si calcolano con *serie*, ovvero in pratica somme infinite, questione che approfondiremo in una lezione successiva.

17.23 Complementi – Angoli notevoli

Nella figura del paragrafo sui valori notevoli, si possono apprezzare molti angoli notevoli, espressi in gradi e radianti, e il loro corrispondente punto goniometrico, con coordinate il coseno e rispettivamente il seno di quell'angolo. Per esempio

$$\cos 30^\circ = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Semplici considerazioni di geometria elementare danno subito

BOZZA - DRAFT

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$-\pi$ π	$-\frac{\pi}{2}$ $\frac{3}{2}\pi$	2π
x°	0°	90°	180°	270°	360°
sin	0	1	0	-1	0
cos	1	0	-1	0	1
tan	0	$\nexists$	0	$\nexists$	0
	*	*			

In questa e nelle successive 4 tabelle le colonne asteriscate sono le più importanti.

Non ci proponiamo di imparare a memoria nessun valore di seno, coseno, tangente (e poi arcotangente), ma solo di saperli ricavare disponendo di queste o analoghe tabelle, oppure dalla Figura 3.

BOZZA - DRAFT

Caveat. Nello schema soprastante è da intendersi che

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \sin(270^\circ)$$

assolutamente non si intenda che $-\frac{\pi}{2}$ sia uguale a 270°.

La considerazione del quadrato inscritto nel circolo goniometrico e coi lati paralleli agli assi, che per il Teorema di Pitagora ha lato $\sqrt{2}$, dà subito, con analogo *caveat* come sopra (e anche dopo),

			$-\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{\pi}{4}$
x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$
x°	45°	135°	225°	315°
sin	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
tan	1	-1	1	-1
	*			

BOZZA - DRAFT

La considerazione dei 2 esagoni regolari inscritti nel circolo goniometrico, con un vertice in $(0,1)$ e rispettivamente in $(1,0)$, dà subito, dividendoli in triangoli equilateri di lato 1 e altezza $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{\pi}{6}$
			$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$
x°	30°	150°	210°	330°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
	*			

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{\pi}{3}$
			$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$
x°	60°	120°	240°	300°
sin	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
	*			

La considerazione di decagoni regolari darebbe ancora altri valori.

BOZZA - DRAFT

17.24 Complementi – Trigonometria

In un triangolo di lati a, b, c, con angoli rispettivamente opposti α, β, γ valgono i seguenti 2 teoremi.

Teorema dei Seni.[19]

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Teorema del Coseno.[20]

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma.$$

Ed esistono innumerevoli altri teoremi e formule di Trigonometria.

17.25 Complementi – Geometricamente e analiticamente

Le funzioni goniometriche vengono di solito definite per via geometrica ma si potrebbe definirle con l'analisi matematica; tutte le altre funzioni elementari vengono di solito definite con l'analisi matematica

BOZZA - DRAFT

[19] Nasir al-Din al-Tūsī, persiano, XIV-XV sec. d.C. "He is often considered the creator of trigonometry as a mathematical discipline in its own right", Wikipedia, l'enciclopedia libera.

[20] Euclide, greco, III sec. a.C., ben noto, e Jamshīd al-Kāshī, persiano, XIII sec. d.C. "Much of al-Kāshī's work was not brought to Europe, and much, even the extant work, remains unpublished in any form", Wikipedia, l'enciclopedia libera.

ma si potrebbe definirle per via geometrica, e adesso lo mostriamo per alcune di esse.

Un'infinità di problemi geometrici con **lunghezze** e **aree** relativamente a **poligoni** possono venir risolti con le funzioni lineari

$$y = m\,x + q \qquad \text{(funzione meglio detta affine)}$$

e con la radice quadrata e la sua inversa, il quadrato:

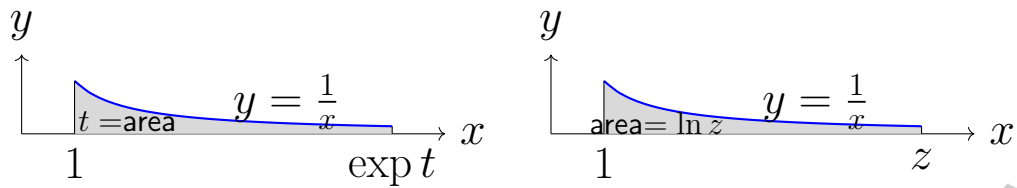
$$\sqrt{x} \qquad x^2$$

Queste funzioni, del tutto costruibili nella geometria, si rivelano ottimi modelli di un'infinità di fenomeni delle Scienze Applicate.

Nuove funzioni compaiono considerando **coniche** invece che poligoni, e, di nuovo, si rivelano ottimi modelli di un'infinità di fenomeni delle Scienze Applicate.
Precisamente l'**iperbole equilatera** genera (in modi non banali:

BOZZA - DRAFT

integrali) l'**esponenziale** e la sua inversa, il **logaritmo** naturale:



(Storicamente l'esponenziale e il logaritmo non furono definiti in questo modo geometrico ma si può fare).

BOZZA - DRAFT

17.26 Complementi: Funzioni goniometriche in Farmacia

Le funzioni goniometriche ovvero trigonometriche ricorrono un'infinità di volte nelle Scienze Applicate, in particolare in Fisica.

Le applicazioni in Farmacia e Chimica Farmaceutica sono rare, ma quelle vicine ad esse sono molte, e in Fisica moltissime.

Qua di seguito qualche ricorrenza vicina alla Farmacia.

• Si può guardare la formula che dà la distanza fra 2 punti sulla Terra (identificati da latitudine e longitudine) che ipoteticamente può venire considerata nel tracciamento dei contatti covid, come si vede in[21] figura, formula con 3 funzioni goniometriche:

3 CONTACT TRACING

As discussed in the introduction section, our solution for contact tracing relies on the location sharing data, i.e., GPS location of the users collected through our app. The naive solution will be to compute the Euclidean distance (or *Haversine distance* as shown in (1), where ϕ_i and λ_i for $i \in \{1, 2\}$ are lat/long of two users, if one wants to be more exact) every t mins for finding the contact event.

$$d = 2r \arcsin\left(\sqrt{\sin^2\left(\frac{\phi_2-\phi_1}{2}\right) + \cos(\phi_1)\cos(\phi_2)\sin^2\left(\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}\right)}\right) \quad (1)$$

A contact event is defined as when two users are within a distance of d meter for at least t mins. The naive solution for contact tracing requires computing pairwise distances and has the complexity of $O(n^2)$ for n users and hence not feasible for large n. Therefore, we

Le formule trigonometriche stanno dietro la grafica computerizzata 3D. Si veda per esempio questo spettacolare visualizzatore interattivo di molecole:

[21] Screenshot da arXiv:2105.15030 [cs.HC] https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.15030 "Digital Contact Tracing for Covid 19", by Chandresh Kumar Maurya, Seemandhar Jain, Vishal Thakre (Submitted on 22 May 2021)

BOZZA - DRAFT

https://molview.org/

• Sono alla base (con l'Analisi di Fourier) di una branca scientifica in qualche modo tangente alle Scienze Biomediche: l'Elaborazione di Immagini.

• Gli angoli di legame della Chimica, vedi **??**.

• Nelle determinazioni posizionali dell'MRI, *magnetic resonance imaging*.

• La trigonometria tocca marginalmente la Farmacia anche con la Legge di Bragg e la Legge di Snell, utili nella Cristallografia a raggi X, usata per l'analisi dei cristalli di sostanze chimiche solide. LINK-> LINK-> LINK->

• La questione trigonometrica più interessante in questa trattazione elementare è la funzione arcotangente perché dà una distribuzione di probabilità (di Cauchy) simile alla ben più importante distribuzione normale, ma per certi versi più semplice.

BOZZA - DRAFT

ESERCIZI SULLA LEZIONE 17

ESERCIZIO $_{\mu}$

Qual è la misura in radianti di un angolo di $150°$?

SVOLGIMENTO

Sappiamo che $180°$ sono π radianti da cui la proporzione

$$\pi_{rad} : 180° = x_{rad} : x°$$

e adesso

$$\pi_{rad} : 180° = x_{rad} : 150°$$

$$\frac{\pi_{rad}}{180°} = \frac{x_{rad}}{150°} \quad \Big/ \cdot 150°$$

$$\frac{\pi_{rad}}{180°} \cdot 150° = x_{rad}$$

$$x_{rad} = \frac{15}{18}\,\pi_{rad}$$

$$\boxed{\frac{5}{6}\,\pi}$$

BOZZA - DRAFT

ESERCIZIO$_{\mu}$

$*$ La concentrazione sanguigna di una certa sostanza sia modellizzata nelle 24 ore del giorno da

$$u_a(t) := 2\,a\, + a\,\sin\frac{\pi\,t}{12} \qquad 0 \le t \le 24$$

essendo a un parametro fissabile farmacologicamente. In quale orario la concentrazione è ≥ 2.5 per $a := 1$?

Svolgimento.

Seppure non sia necessario per risolvere il problema, vediamo su WolframAlpha il grafico della concentrazione per $a := 1$ scrivendovi

```
plot 2+Sin[Pi t/12], t from 0 to 24
```

Ora (con $a := 1$) abbiamo la disequazione

$$2 + \sin\frac{\pi\,t}{12} \geq 2.5 \qquad \Big/ + (-2)$$

$$\sin\frac{\pi\,t}{12} \geq 0.5$$

poniamo $x := \dfrac{\pi\,t}{12}$ ottenendo $\sin x \geq \dfrac{1}{2}$

e ci interessano solo i tempi

$$0 \le t \le 24 \qquad \Big/ \cdot \frac{\pi}{12}$$

BOZZA - DRAFT

$$0 \leq \frac{\pi\, t}{12} \leq 2\,\pi \text{ cioè } 0 \leq x \leq 2\,\pi$$

e allora in $[0, 2\,\pi]$ dobbiamo risolvere $\sin x \geq \frac{1}{2}$, che si fa disegnando il circolo goniometrico, trovando subito (sono valori notevoli)

$$\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$$

cioè

$$\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi\, t}{12} \leq \frac{5}{6}\pi \Big/ \cdot \frac{12}{\pi}$$
$$2 \leq t \leq 10$$

e in conclusione

Fra le 2 e le 10 di mattina

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$ Risolvere la seguente equazione goniometrica:

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

Svolgimento

Si risolve subito disegnando un circolo goniometrico e segnandovi gli angoli $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5}{6}\pi$, corrispondenti appunto a $\sin x = \frac{1}{2}$:

BOZZA - DRAFT

$$x = \tfrac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee \ x = \tfrac{5}{6}\,\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

(Si notino le periodicità).

ESERCIZIO$_{\mu}$ Approssimare $\cos(1)$ usando le (16) e (17).
Si verifichi poi su WolframAlpha con `Cos[1]`

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$ Risolvere la disequazione

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x < 2\,\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Svolgimento
Con la formula di addizione del coseno

$$2\Big(\cos x\,\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin x\,\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\Big) =$$

e coi valori notevoli ben conosciuti

$$= 2\left((\cos x)\left(-\frac{1}{2}\right) - (\sin x)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -\cos x - \sqrt{3}\,\sin x$$

BOZZA - DRAFT

e con il secondo membro così riscritto la disequazione equivale a

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x < -\cos x - \sqrt{3}\,\sin x$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < -\sqrt{3}\,\sin x$$

$$-\sqrt{3}\,\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Big/ : (-\sqrt{3}) < 0$$

$$\sin x < -\frac{1}{2}$$

che si risolve subito disegnando un circolo goniometrico e segnandovi l'arco da $-\frac{5}{6}\pi$ fino a $-\frac{\pi}{6}$, estremi esclusi, corrispondente appunto a $\sin x < -\frac{1}{2}$:

$$\boxed{-\tfrac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < -\tfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

equivalentemente scritta

$$\boxed{\tfrac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \tfrac{11}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

BOZZA - DRAFT