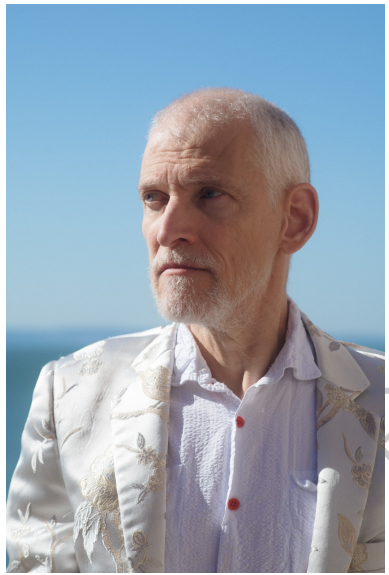
Le Compresse di Matematica per le Scienze della Farmacia

Lezioni 22-23

versione 6 novembre 2026

BOZZA - DRAFT

Università degli Studi di Trieste



Alessandro Soranzo
Ricercatore universitario
Settore Scientifico Disciplinare:
MATH-03/A - Analisi matematica
Gruppo Scientifico Disciplinare:
01/MATH-03 - Analisi matematica, probabilità e statistica matematica

BOZZA - DRAFT

Indice

22 Limiti e geometrica convergente **5**

22.1 Tre storie, tre destini[10] 5
22.2 Conclusione: i possibili valori del limite in $+\infty$[18] . . . 10
22.3 I limiti più significativi a $+\infty$ e a $-\infty$[20] 11
22.4 Limiti infiniti in 0[25] 13
22.5 Limiti verso un numero finito, e continuità[27] 14
22.6 Funzioni limitate, infinite, infinitesime[31] 17
22.7 Regole di calcolo dei limiti[32] 19
22.8 Un prelievo al giorno: da funzione a successione[35] . . 22
22.9 Successioni (di numeri reali)[38] 25
22.10 Limite finito, nullo, infinito delle successioni[40] 27
22.11 Un limite banale ma illuminante[43] 30
22.12 Una triste storia di infermità a lieto fine e una no[44] . 31
22.13 Il Modello Malthusiano[46] 33
22.14 Serie geometrica e il farmaco che si accumula[49] . . . 36

BOZZA - DRAFT

22.15Applicazione probabilistica: durata della bora[56] 42
22.16Complementi – Problema aperto: Collatz 50
22.17Complementi – Problema aperto: Feigenbaum 51
22.18Complementi – Esperienza pratica coi limiti 51
22.19Complementi – 4 tipi di definizioni di successioni . . . 52
22.20Complementi – Tecnicismi sui limiti di funzioni 59
22.21Complementi – Forme di indecisione dei limiti 62
22.22Complementi – Limiti di successioni prolungabili . . . 62

23 Derivate – I parte **66**
23.1 Quanto cresce, oggi, l'epidemia?[00] 66
23.2 Primo esempio base sulle derivate[03] 67
23.3 Derivata in un punto e funzione derivata[15] 72
23.4 Notazioni per la derivata prima[19] 73
23.5 Secondo esempio base: epidemia e sinusoide[21] 74
23.6 Retta tangente e linearizzazione[35] 79

BOZZA - DRAFT

22 Limiti e geometrica convergente

22.1 Tre storie, tre destini[10]

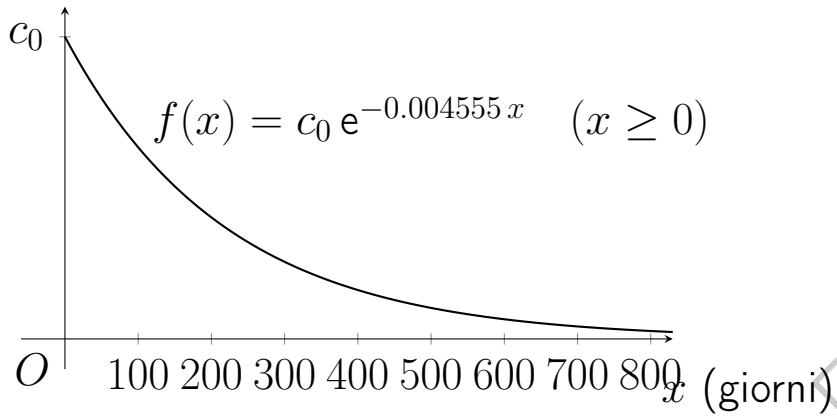
Di una grandezza che varia nel tempo – la concentrazione di un farmaco nel sangue, il numero di morti di un'epidemia – una delle domande più importanti è: **dove va a finire?** Il *limite* è la risposta matematica a questa domanda.

BOZZA - DRAFT

Storia 1. Il farmaco che se ne va. Se una persona assume 1 sola volta il principio attivo bedaquilina[(1)] la concentrazione nel sangue in funzione del tempo x dall'assunzione si ritiene, per un soggetto in qualche modo medio[(2)] o standard, che sia modellizzabile – in forma semplificata – con questa formula:

[1] Il farmaco/medicinale commerciale più noto che la contiene si chiama Sirturo, ma nel linguaggio comune si dice spesso "bedaquilina" anche per indicare il farmaco nel suo uso clinico.

[2] Con variazioni individuali di cui qua non ci occupiamo.



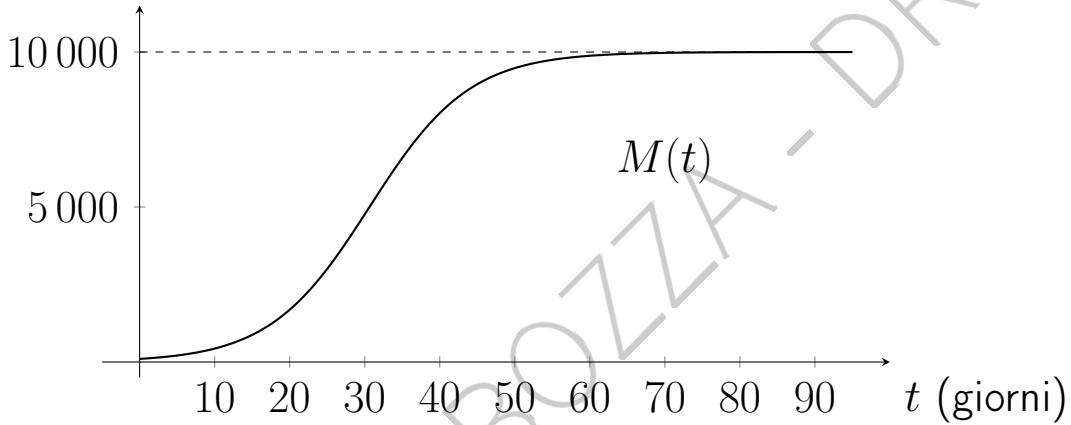
(corrispondente a un *tempo di dimezzamento* di circa 5 mesi) essendo c_0 la concentrazione iniziale, cioè per $x = 0$. Chiunque direbbe che *la concentrazione $f(x)$ va a 0 via via che il tempo x passa*, e matematicamente si dice che $f(x)$ *tende a 0 per x che tende a $+\infty$*, oppure che *il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ vale 0*

e si scrive $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

BOZZA - DRAFT

Storia 2. L'epidemia che si esaurisce. In un'epidemia (ipotetica, ma con andamento realistico) il numero *cumulativo* di morti, cioè il totale dei morti dall'inizio fino al giorno t, sia modellizzato da

$$M(t) = \frac{10\,000}{1 + 99\,\mathrm{e}^{-0.15\,t}} \qquad t \geq 0$$



BOZZA - DRAFT

giorno t	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$M(t)$	100	433	1687	4762	8030	9481	9879	9973	9994	9999

Il numero di morti cresce sempre, ma *non* va all'infinito: si avvicina indefinitamente a 10 000, che è il **bilancio finale** dell'epidemia:

$$\lim_{t\to+\infty} M(t) = 10\,000$$

Questa curva è una *sigmoide* ("a forma di S") e in questo caso è una *logistica*, e la rivedremo con le derivate.

Storia 3. Il contagio senza freni. Nella fase iniziale di un'epidemia, se non interviene nulla, i casi raddoppiano ogni tot giorni: $2, 4, 8, 16...$ e il modello è $c \cdot 2^{t/T}$. Questa grandezza supera qualunque soglia e si scrive

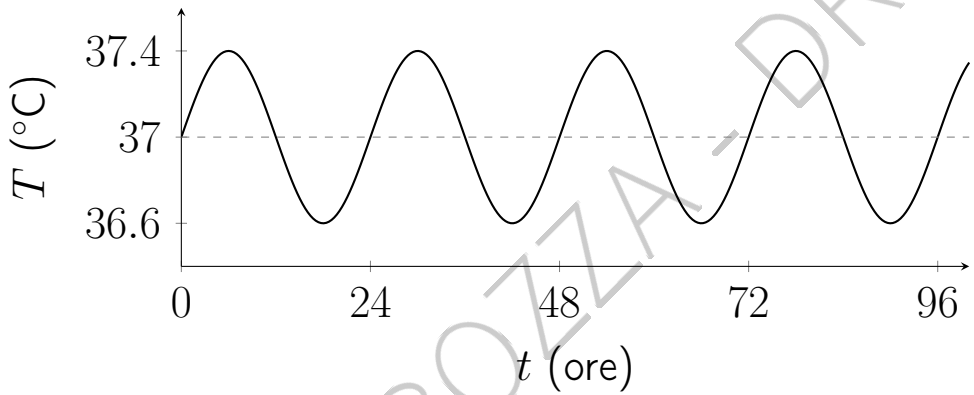
$$\lim_{t\to+\infty} c \cdot 2^{t/T} = +\infty$$

Nella realtà questo non succede mai fino in fondo (la popolazione è finita): la crescita rallenta e si torna alla Storia 2. Si osservi infatti che la parte iniziale della sigmoide *sembra* esponenziale.

BOZZA - DRAFT

E un quarto destino: nessun limite. La temperatura corporea oscilla ogni giorno (ritmo circadiano), diciamo $T(t) = 37 + 0.4 \sin \frac{2\pi t}{24}$ con t in ore. Non si "assesta" mai su un valore: diremo che *il limite non esiste*:

$$\nexists \lim_{t \to +\infty} T(t)$$

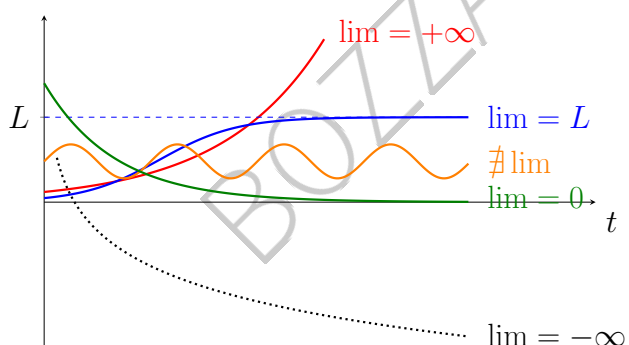


BOZZA - DRAFT

22.2 Conclusione: i possibili valori del limite in $+\infty$[18]

Una grandezza $f(t)$ che varia nel tempo t, per $t \to +\infty$, può:

tendere a 0	il farmaco eliminato	$\lim = 0$
tendere a un numero non nullo	il bilancio finale dell'epidemia	$\lim = L$
crescere senza freni	il contagio iniziale	$\lim = +\infty$
oscillare	il ritmo circadiano	$\nexists \lim$
decrescere senza freni	$\log_{1/2}$	$\lim = -\infty$



BOZZA - DRAFT

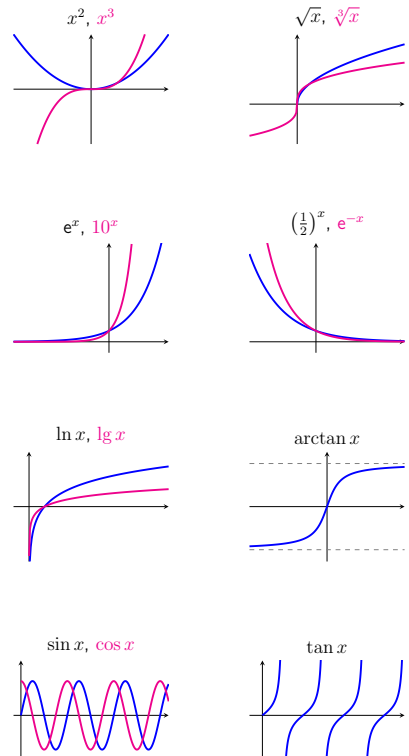
22.3 I limiti più significativi a $+\infty$ e a $-\infty$[20]

Come esiste il limite per $x \to +\infty$ esiste anche per $x \to -\infty$.

Dai grafici (e per tutte esiste vera dimostrazione) apprendiamo:

$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ e similmente	$x^1, x^3 \ldots x^\alpha$ *con* $\alpha > 0, \sqrt{x}, \sqrt[n]{x}$
$\lim_{x\to+\infty} 10^x = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
$\lim_{x\to+\infty} b^x = +\infty, \quad b > 1$	e 0 se $0 < b < 1$
$\lim_{x\to+\infty} \lg x = +\infty$	$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$	$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$
$\nexists \lim_{x\to+\infty} \sin x$	similmente $\cos$, $\tan$

(1)



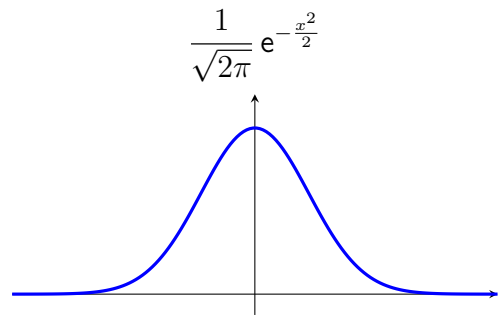
BOZZA - DRAFT

$e^{(3)}$ altri.

Si noti che la Storia 1 è proprio $\lim_{x\to+\infty} b^x = 0$ con $b = e^{-0.004555}$, numero fra 0 e 1, e la Storia 3 è $\lim_{x\to+\infty} b^x = +\infty$ con $b = 2^{1/T} > 1$.

Esempio. Guardando il grafico, per la campana gaussiana vale

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\,\pi}} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\,\pi}} = 0$$



e scriveremo i 2 limiti insieme in questo modo col simbolo $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\,\pi}} = 0$$

BOZZA - DRAFT

3

$\lim_{x\to-\infty} 10^x = 0$ $\qquad$ $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim_{x\to-\infty} b^x = 0, \qquad b > 1$ e $+\infty$ se $0 < b < 1$ (2)

$\lim_{x\to-\infty} x^{dispari\ positivo} = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[dispari\ positivo]{x} = -\infty$

22.4 Limiti infiniti in 0^{25}

$$\lim_{x\to 0^+} \lg x = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

La scrittura $x \to 0^+$ significa che x tende a 0 *da destra*, ovvero da valori maggiori di 0; similmente $x \to 0^-$, *da sinistra*. E in generale $x \to x_0^+$ e $x \to x_0^-$.

BOZZA - DRAFT

Esempio termodinamico. Per un gas ideale a temperatura costante (isoterma) $p = \frac{cost}{V}$:

$$\lim_{V\to 0^+} \frac{cost}{V} = +\infty \qquad \lim_{V\to +\infty} \frac{cost}{V} = 0$$

al tendere a 0 del volume la pressione andrebbe all'infinito, e al tendere all'infinito del volume la pressione andrebbe a 0, se il gas restasse ideale.

22.5 Limiti verso un numero finito, e continuità[27]

Consideriamo il limite di f per $x \to x_0$ con $x_0 \in \mathbb{R}$, anche distinguendo x_0^+ e x_0^-, e ci sono 2 casi:
$\diamond$ $x_0 \notin \text{dom} f$, p. es. $\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
$\diamond$ $x_0 \in \text{dom} f$ e ci sono 2 sottocasi:

$$\boxed{\bullet \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) : \text{ la funzione si dice continua in } x_0} \qquad (3)$$

e si noti che

$$\boxed{\text{le funzioni elementari sono continue nei loro domini}} \qquad (4)$$

e allora per esse sempre limite = valore calcolato, per esempio

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1$$

• $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$: la f si dice discontinua in x_0 e questo può essere solo con funzioni non elementari come $\text{sgn}(x)$ e $\lfloor x \rfloor$.

BOZZA - DRAFT

Allora per le funzioni elementari sono significativi solo i limiti dove la funzione “smette di esistere": gli estremi, finiti o no, degli intervalli che compongono il dominio, non appartenenti ad esso:

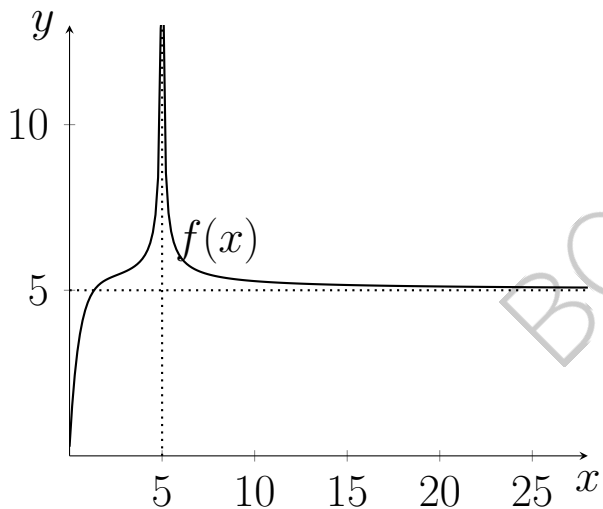
$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \text{ [forma 0 su 0] } \lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt{x}} \text{ [funzione elementare, limite=valore] } = \frac{1}{2}\,.$$

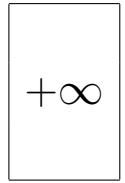
BOZZA - DRAFT

ESERCIZIO$_{\mu 2025}$ (R) Dire quanto vale il sottostante limite, e ovviamente si supponga che la funzione non faccia strani capricci nella regione illimitata del piano cartesiano che non è rappresentata nel disegno, ovvero che il disegno del grafico mostri qual è sostanzialmente il comportamento della funzione:

$$\lim_{x \to 5} f(x)$$



BOZZA - DRAFT



Nota. Si intuisce che la funzione tende a valori indefinitamente grandi all'avvicinarsi di x al valore 5. Si noti anche che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5$, ovvero la retta tratteggiata $y = 5$ è un *asintoto orizzontale*, come vedremo.

BOZZA - DRAFT

22.6 Funzioni limitate, infinite, infinitesime[31]

Si dice *limitata* una f tale che esistono 2 numeri M e N tali che $M < f(x) < N$, per esempio $\sin x$, o la temperatura circadiana della Storia 4. Limitata $\not\Rightarrow \exists$ limite.

Si dice *infinita* una funzione che tende a $+\infty$ o $-\infty$ e *infinitesima* una che tende a 0 (per $x \to u_0$ finito o no). Per esempio sono infinite

per $x \to +\infty$ le b^x con $b > 1$, e infinitesime per $0 < b < 1$; viceversa per $x \to -\infty$. Infinite le $\log_b x$ per $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$.

BOZZA - DRAFT

22.7 Regole di calcolo dei limiti[32]

Risolveremo i limiti un po' in modo intuitivo, anche guardando il grafico, e anche esaminando "a pezzetti" le espressioni delle funzioni. Formalizziamo alcune "regole", che valgono anche per le successioni (che vedremo nella prossima sezione):

$$\begin{array}{lll} (a) & L_1, L_2 \in \mathbb{R}: & tende\ a\ L_1 + tende\ a\ L_2 \to L_1 + L_2 \\ (b) & L_1, L_2 \in \mathbb{R}: & tende\ a\ L_1 \cdot tende\ a\ L_2 \to L_1 \cdot L_2 \\ (c) & L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: & \frac{1}{tende\ a\ L} \to \frac{1}{L} \end{array} \tag{5}$$

BOZZA - DRAFT

Per quanto gli infiniti non siano numeri e le espressioni seguenti siano scorrette matematicamente, valgono come mnemonici:

$$
\begin{array}{lll}
(a) & +\infty + \infty \to +\infty & (p.es.\ x^3 + \mathrm{e}^x \quad per\ x \to +\infty) \\
(b) & +\infty \cdot (+\infty) \to +\infty & (p.es.\ x^3\,\mathrm{e}^x \quad per\ x \to +\infty) \\
(c)\ L \in \mathbb{R}: & +\infty + L \to +\infty & (p.es.\ x^2 + \arctan x \quad per\ x \to +\infty) \\
(d)\ L \in \mathbb{R}^+: & +\infty \cdot L \to +\infty & (p.es.\ x^3 \arctan x \quad per\ x \to +\infty) \\
(d')\ -L \in \mathbb{R}^+: & +\infty \cdot L \to -\infty & (p.es.\ -2\,x^3 \quad per\ x \to +\infty) \\
(e) & \frac{1}{+\infty} \to 0 & (p.es.\ 1/x^3 \quad per\ x \to +\infty) \\
(f) & limitata + (+\infty) \to +\infty & (p.es.\ \sin x + x^3 \quad per\ x \to +\infty) \\
(g) & \frac{limitata}{+\infty} \to 0 & (p.es.\ \sin x/x^3 \quad per\ x \to +\infty)
\end{array}
\tag{6}
$$

E anche:

- reciproca d'infinitesima > 0, $\to +\infty$, p.es. $\lim_{x\to\pi^-} \frac{1}{\sin x} = +\infty$
- reciproca d'infinitesima < 0, $\to -\infty$, p.es. $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{\ln x} = -\infty$

BOZZA - DRAFT

Esempio: il bilancio finale dell'epidemia (Storia 2).

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{10\,000}{1+99\,\mathrm{e}^{-0.15\,t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{10\,000}{1+\frac{99}{\mathrm{e}^{0.15\,t}}} = \frac{10\,000}{1+0} = 10\,000.$$

Più in generale, con costanti positive K, q, r,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{K}{1+q\,\mathrm{e}^{-r\,t}} = K \tag{7}$$

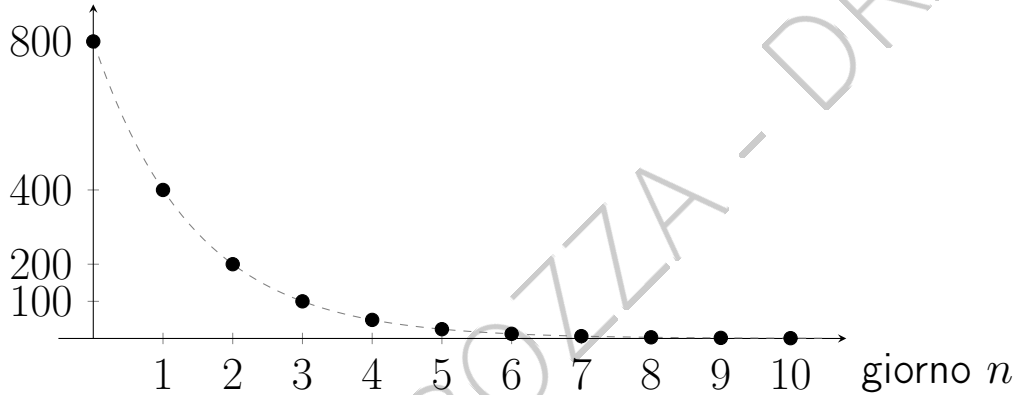
(Si veda Wikipedia alla voce *Equazione logistica*).

Restano fuori queste **forme di indecisione**, da risolvere caso per caso: $+\infty-\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, ∞^0, 1^∞, 0^0. Si vedano i Complementi.

BOZZA DRAFT

22.8 Un prelievo al giorno: da funzione a successione[35]

Detto semplificatamente, ogni volta che un veleno o un farmaco entra nel sangue, il corpo cerca di eliminarlo il prima possibile, o nell'urina, o distruggendolo nel fegato. Tipicamente, ogni tot tempo (l'emivita) la sostanza residua dimezza (sia concentrazione che quantità assoluta).



BOZZA - DRAFT

Per una sostanza con tempo di dimezzamento di 24 ore, di cui all'inizio si abbia una concentrazione – per esempio – 800, con qualche unità di misura, **misurando una volta al giorno** si avranno le concentrazioni nella seguente tabella.

giorno n	$\frac{800}{2^n}$	
0	800	iniziale
1	400	
2	200	
3	100	
4	50	
5	25	
6	12.5	
7	6.25	
8	3.125	
9	1.5625	
10	0.78125	meno dell'1 per mille dell'iniziale
...	...	
20	0.000762939453125	qua è quasi 0: nel tempo **tende a 0**

BOZZA - DRAFT

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{800}{2^n} = 0$$

Ora la variabile n assume solo i valori $0, 1, 2, 3...$: non abbiamo più una funzione definita su tutti i reali, ma una **successione**.

Si noti che il soggetto sarà già morto, e quindi privo di concentrazione sanguigna, molto prima non solo dell'inesistente giorno $+\infty$, ma anche del milionesimo giorno: nondimeno, il fatto che la concentrazione di quella sostanza *tende a zero*, è molto significativo.

Ambiguità notazionale. Altri Autori scrivono $n \to \infty$ invece di $n \to +\infty$.

BOZZA - DRAFT

22.9 Successioni (di numeri reali)[38]

Mentre passaggio al quadrato, exp, sin, cos... a numeri reali associano numeri, il fattoriale SOLO A NUMERI NATURALI associa numeri. Cioè, esistono 2.5^2 ed $e^{2.5}$ ma $2.5!$ non[(4)] esiste.

Questo tipo di funzioni numeriche definite solo su $\mathbb{N}$ o su una sua semiretta (per esempio $\{1, 2, 3...\}$ senza lo 0) si chiamano

SUCCESSIONI (di numeri reali).

Invece che indicarle con simboli come $f(x)$ oppure $g(n)$ si preferisce indicarle con a_n oppure y_m oppure z_k e simili, per esempio $y_n := n!$ e il fattoriale è definito così:

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

BOZZA - DRAFT

[4] A un livello superiore viene definito, con la funzione gamma.

Un'altra è la successione di Fibonacci a_n, definita da

$a_0 := 0, \quad a_1 := 1, \quad a_{n+1} := a_n + a_{n-1}$ cioè $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...$

e poi abbiamo queste altre, dei reciproci e dei quozienti:

$r_n := \dfrac{1}{a_n}$ $q_n := \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ a_n successione di Fibonacci, $n = 1, 2...$

BOZZA - DRAFT

22.10 Limite finito, nullo, infinito delle successioni[40]

n	Fibonacci a_n	$q_n = a_{n+1}/a_n$		$r_n = 1/a_n$
1	1	1/1	1	1
2	1	2/1	2	1
3	2	3/2	1.5	0.5
4	3	5/3	1.66667	0.333333
5	5	8/5	1.6	0.2
6	8	13/8	1.625	0.125
7	13	21/13	1.61538	0.0769231
8	21	34/21	1.61905	0.047619
9	34	55/34	1.61765	0.0294118
10	55	89/55	1.61818	0.0181818
11	89	144/89	1.61798	0.0112360
12	144	233/144	1.61806	0.00694444
...	...	...	...	...
30	832040		1.61803	$1.20187 \cdot 10^{-6}$

BOZZA-DRAFT

Guardando i numeri ipotizziamo, ed è vero e si potrebbe dimostrare:

• q_n tende alla sezione aurea $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618...$ (**limite finito**):

$$\lim_{n\to+\infty} q_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

• r_n tende a 0 (**limite nullo**, caso particolare del limite finito, ma importantissimo):

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = 0 \qquad \text{e similmente} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$$

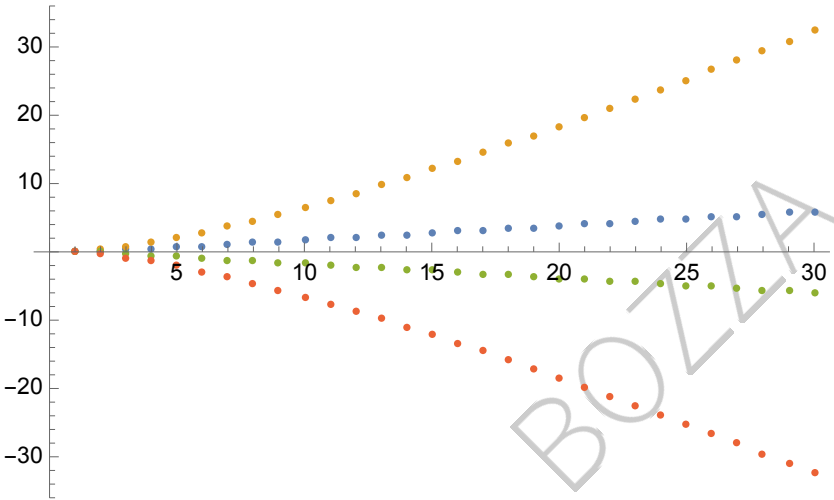
• a_n diventa definitivamente QUANTOMAI GRANDE, e più precisamente fissata una qualunque soglia M, da un certo punto in poi $a_n > M$ (**limite** $+\infty$):

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \qquad \text{e similmente} \qquad \lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$$

Analogamente si definisce il limite $-\infty$, per esempio $\lim_{n\to+\infty} \lg \frac{1}{n!} = -\infty$, e il logaritmo decimale di $1/70!$ è già circa -100.

BOZZA - DRAFT

La teoria dei limiti viene svolta in Analisi Matematica a un livello piuttosto complesso ma noi ci accontenteremo di RAGIONAMENTI EURISTICI: in pratica di ragionamenti approssimativi basati sul guardare i numeri e i grafici, e su poche formule.



BOZZA - DRAFT

Figura 1: Dall'alto verso il basso, in scala logaritmica, grafici dei valori di $n!$, a_n, $1/a_n$ e $1/n!$ essendo a_n la successione di Fibonacci.

Sulla rapidissima crescita del fattoriale. Il fattoriale va all'infinito rapidamente, perfino più dell'esponenziale, e per $n \geq 25$ supera 10^n. (Ciò ha profonde implicazioni combinatorie e probabilistiche).

22.11 Un limite banale ma illuminante[43]

Sia y_n il valore della costante di gravitazione universale al giorno n (contando i giorni da una data qualunque). Per quanto attualmente se ne sa, essa è costante nel tempo, e nel Sistema Internazionale vale $6.67... \times 10^{-11}$ (unità di misura omesse). Quanto vale al "giorno $+\infty$"? Un tale giorno mai esisterà, perché $+\infty$ non è un numero; nondimeno chiunque capisce il senso della domanda, e la risposta è ovviamente ancora $6.67... \times 10^{-11}$. Per ogni costante reale c:

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} c = c} \tag{8}$$

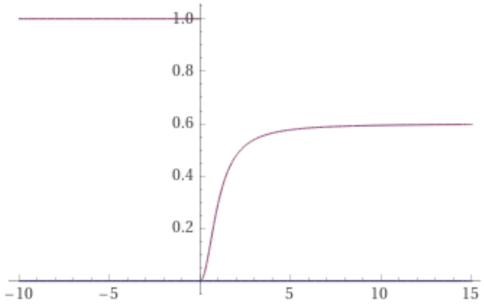
BOZZA - DRAFT

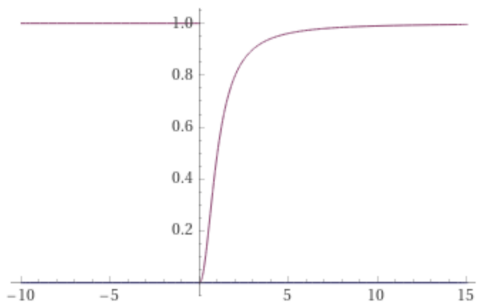
22.12 Una triste storia di infermità a lieto fine e una no[44]

Alcibiade, soggetto A, alle ore 00:00 si sega alcune dita della mano destra con la sega elettrica, ed essa cade sullo stesso dito della mano destra di Berengario, soggetto B: gli fa un tremendo male ma niente di più.
Detto t il tempo, per esempio in giorni, e 0 l'istante (giorno) dell'incidente, la funzionalità della mano destra di A, sia essa $\alpha(t)$, e la funzionalità della mano destra di B, sia essa $\beta(t)$, che per $t < 0$ erano 1 ovvero 100%, precipitano entrambe a 0.
Ma nel tempo B tende a recuperare al 100% la funzionalità della mano infortunata, mentre ad A, che pure recupera via via molto nei giorni successivi all'incidente, tende a rimanere sul lungo periodo un'invalidità residua permanente, diciamo del 40%:

$$\lim_{t\to+\infty} \alpha(t) = 0.6 \qquad \lim_{t\to+\infty} \beta(t) = 1$$

BOZZA DRAFT





Tutto questo rimane vero considerando 1 singolo valore per giorno, alle 00:01, ottenendosi successioni a_n e b_n invece delle funzioni $\alpha(t)$ e $\beta(t)$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.6 \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = 1$$

e i grafici verrebbero "a puntini" invece che con archi di curva.

Medicina legale. L'invalidità permanente residua è la percentuale di danno fisico o funzionale che resta dopo la guarigione da un infortunio o una malattia. Per esempio un pollice perduto vale 18% di invalidità permanente secondo le tabelle medico-legali INAIL.

BOZZA - DRAFT

22.13 Il Modello Malthusiano[46]

Modello semplice di espansione di una popolazione: ogni giorno la popolazione si moltiplica per lo stesso numero: se quel numero è maggiore di 1 la popolazione esplode ovvero tende a $+\infty$, se è 1 resta ferma, se è fra 0 e 1 si spegne ovvero tende a 0. E un farmaco nel sangue si comporta come una popolazione che si spegne.

Nel semplice modello malthusiano, una popolazione – di microbi o quant'altro – cresce **in proporzione a quanti individui ci sono già**: tanti microbi fanno tanti figli, pochi microbi ne fanno pochi. Se a ogni passo di tempo (un'ora, un giorno, una generazione) si aggiunge una frazione fissa c della popolazione, il *tasso di accrescimento*, la regola è

$$a_{n+1} = a_n + c \cdot a_n \qquad \text{essendo } a_0 = \text{popolazione iniziale}$$

cioè a ogni passo la popolazione viene **moltiplicata per** $1 + c$. Per esempio con $c = 2$ e $a_0 = 1000$:

$$1\,000, \quad 3\,000, \quad 9\,000, \quad 27\,000...$$

BOZZA - DRAFT

Tutto dipende da quel numero $1 + c$:

$c > 0$	si moltiplica per più di 1	cresce senza freni: $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$
$c = 0$	si moltiplica per 1	nati = morti, resta a_0: $\lim_{n\to+\infty} a_n = a_0$
$-1 < c < 0$	si moltiplica per meno di 1	si estingue: $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Con $c = -\frac{1}{2}$ si ha a_0, $\frac{1}{2}a_0$, $\frac{1}{4}a_0$, $\frac{1}{8}a_0$...: è esattamente il farmaco che si dimezza ogni giorno. **Crescita dei microbi ed eliminazione dei farmaci sono la stessa matematica**, con il segno di c cambiato.

Nella realtà nessuna popolazione cresce all'infinito: a un certo punto gli organismi si ostacolano a vicenda, anche per mancanza di spazio e di cibo, e la crescita rallenta, producendo un tratto di sigmoide (come i morti cumulativi dell'epidemia); eventualmente poi la popolazione decresce, fino ad estinguersi o quasi, producendo un grafico più o meno a campana: si veda la figura a questo link->. Il modello di Malthus descrive bene solo la **fase iniziale**.

BOZZA DRAFT

Dettagli per lo studente scrupoloso. Poiché $a_{n+1} = (1+c)\,a_n$, si ha $a_1 = (1+c)\,a_0$, $a_2 = (1+c)\,a_1 = (1+c)^2 a_0$, e così via, cioè la *forma chiusa*

$$a_n = (1+c)^n\,a_0$$

che è una funzione "di tipo esponenziale" (in inglese *exponential growth* o *decay*); i 3 casi della tabella seguono allora dai limiti di b^n con $b = 1+c$ maggiore, uguale o minore di 1.

Il *tempo di raddoppio* è il numero di passi dopo cui $(1+c)^n = 2$, cioè $n = \frac{\ln 2}{\ln(1+c)}$: con $c = 0.3$ circa 2.64 passi. Simmetricamente, per $-1 < c < 0$ il *tempo di dimezzamento* è $n = \frac{\ln 2}{-\ln(1+c)}$: con $c = -0.3$ circa 1.94 passi.

I casi $c \le -1$ non hanno senso biologico: con $c = -1$ la popolazione sparisce tutta al primo passo, con $c < -1$ diventerebbe negativa.

Se il tempo scorre con continuità invece che a passi, il modello diventa $a(t) = a_0\,\mathrm{e}^{r\,t}$, soluzione dell'equazione differenziale $a' = r\,a$ (si veda il paragrafo sulle equazioni differenziali); per c piccolo i due modelli quasi coincidono, perché $(1+c)^n \approx \mathrm{e}^{c\,n}$.

Lo stesso discorso vale per la successione di Fibonacci, che cresce anch'essa esponenzialmente (con rapporto fra termini consecutivi che tende a $\varphi \approx 1.618$).

BOZZA - DRAFT

22.14 Serie geometrica e il farmaco che si accumula[49]

Prendo una compressa al giorno per sempre: il farmaco nel sangue cresce all'infinito? Studiamo la situazione.

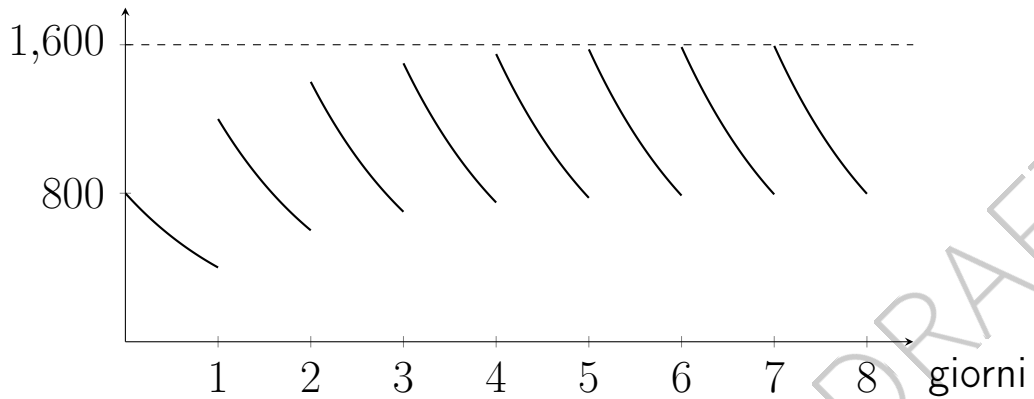
Riprendiamo il farmaco con emivita 24 ore, ma ora il paziente prende **una dose ogni 24 ore**, ciascuna delle quali porta la concentrazione su di 800. Subito dopo ogni dose, nel sangue c'è la dose nuova più ciò che resta delle precedenti:

dose n.	concentrazione subito dopo la dose	
1	800	800
2	$800 + 400$	1200
3	$800 + 400 + 200$	1400
4	$800 + 400 + 200 + 100$	1500
5	$800 + 400 + 200 + 100 + 50$	1550
6	$800 + 400 + 200 + 100 + 50 + 25$	1575
...	...	...
11		1599.22

Prendo una compressa al giorno per sempre: il farmaco nel sangue cresce all'infinito? La risposta nel caso qua considerato è no: si ferma a 1600, il doppio della dose.

Questa cosa del raddoppiare si verifica quando l'intertempo fra le dosi è uguale all'emivita.

BOZZA DRAFT



La concentrazione **non** cresce all'infinito: si assesta a un *plateau* (stato stazionario, in inglese *steady state*) di 1600, il doppio della singola dose. È una delle ragioni per cui la terapia con dosi ripetute funziona, e anche per cui certi farmaci si *accumulano*.

In generale, una somma infinita in cui ogni termine è il precedente moltiplicato per lo stesso numero r si chiama **serie geometrica** di *ragione* r; ed è definita come limite delle somme finite iniziali:

BOZZA - DRAFT

$$a$$
$$a + a\,r$$
$$a + a\,r + a\,r^2$$
$$...$$
$$a + a\,r + a\,r^2 + ... + a\,r^k$$

Ci occuperemo della sola *serie geometrica di ragione r compresa fra 0 e 1 esclusi*, che ricorre ampiamente anche nel Calcolo delle Probabilità:

$$\boxed{\begin{array}{l} a + a\,r + a\,r^2 + ... + a\,r^k + ... = \sum_{k=0}^{\infty} a\,r^k = \frac{a}{1-r} \\ a \in \mathbb{R} \\ 0 < r < 1 \end{array}} \qquad (9)$$

(La formula vale anche per $-1 < r < 1$ ma ci interessano solo i valori $0 < r < 1$, e poi il caso $r = 0$ è ovvio).

Nel caso del farmaco $a = 800$, $r = \frac{1}{2}$ e il plateau vale $\frac{800}{1-\frac{1}{2}} = 1600$. (Il plateau è il valore *massimo*, raggiunto subito dopo ogni dose: poi

BOZZA - DRAFT

la concentrazione scende, con la dose successiva risale, e così via, a dente di sega).

In generale, **con dosi ogni τ ore ed emivita T ore**, fra una dose e l'altra resta la frazione $r = 2^{-\tau/T}$ e

$$\text{plateau} = \frac{\text{dose}}{1 - 2^{-\tau/T}}$$

che con emivita T uguale all'intertempo τ fra le dosi dà proprio

$$\text{plateau} = \text{doppio della dose}$$

Esempio.

$$3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + ... + \frac{3}{2^k} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{3}{1 - 1/2} = 6$$

ESERCIZIO$_{\mu 2025}$ *

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 0.\bar{3}^n$$

BOZZA - DRAFT

SVOLGIMENTO

Viene usato lo standard del punto decimale.

È una serie geometrica

$$a + a\,r + a\,r^2 + ... + a\,r^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a\,r^n$$

di ragione $r = 0.\bar{3}$ che è un numero fra 0 e 1 esclusi, con $a = 1$, e allora è convergente con somma

$$\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-0.\bar{3}} =$$

che è il cercato risultato esatto, molto malamente espresso. (Ma è già qualcosa). Ora ricordiamo che $0.\bar{3}$ ovvero $0.3333...$ è $\frac{1}{3}$ e continuiamo

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} =$$

$$\boxed{\frac{3}{2}}$$

ovvero meglio, visto che il quesito è espresso con la scrittura decimale e non quella frazionaria,

BOZZA - DRAFT

1.5

BOZZA - DRAFT

22.15 Applicazione probabilistica: durata della bora[56]

ESERCIZIO$_{\mu 2018 \neq}$ $* \approx {}^{\%}$ Una certa affezione, quando insorge ha una durata in giorni (interi) con probabilità

$\frac{1}{2}$ di durare 1 giorno, $\frac{1}{4}$ di durare 2 giorni, $\frac{1}{8}$ di durare 3 giorni, ..., $\frac{1}{2^n}$ di durare n giorni.

(Che si chiama *densità geometrica iniziante da 1 di parametro* $\frac{1}{2}$). Qual è la probabilità che duri un numero pari di giorni?

SVOLGIMENTO

Detta X la durata dell'affezione

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \cdots & \frac{1}{2^n} & \dots \end{pmatrix}$$

$$P(X\ pari) = P(X=2) + P(X=4) + P(X=6) + \dots = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$$

che si riconosce esser serie geometrica di ragione $r = \frac{1}{4}$ (ogni termine è pari al precedente moltiplicato per $\frac{1}{4}$) con anche $a = \frac{1}{4}$, e allora somma

$$\frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} =$$

BOZZA - DRAFT

$$\frac{1}{3} \approx 0.333 = 33.3\%$$

Si noti che allora è più probabile che duri un numero dispari di giorni. Questo rimane vero con qualunque valore di $p \in]0, 1[$, non solo $\frac{1}{2}$, e perfino con qualunque densità decrescente definita su 1,2,3... A Trieste si dice che il vento bora tende a durare un numero dispari di giorni.



Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule *contemporaneamente* numerate *et* riquadrate, oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

BOZZA - DRAFT

ESERCIZI da svolgere

BOZZA - DRAFT

ESERCIZIO da svolgere 1. Un farmaco viene somministrato per *infusione continua* (flebo) e la sua concentrazione nel sangue, in mg/l, è

$$c(t) = 50\left(1 - \mathrm{e}^{-0.2\,t}\right) \qquad t \text{ in ore}$$

Calcolare $c(0)$, $c(10)$ e $\lim_{t\to+\infty} c(t)$, e dire quale dei "destini" della sezione si realizza.
Risultato: $c(0) = 0$, $c(10) \approx 43.2$, limite 50 (concentrazione *di regime*).

ESERCIZIO da svolgere 2. Per l'epidemia con $M(t) = \frac{20\,000}{1+399\,\mathrm{e}^{-0.1\,t}}$ quanti morti si avevano al giorno 0, e qual è il bilancio finale?
Risultato: 50 e 20 000.

ESERCIZIO da svolgere 3. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2} \qquad \lim_{x\to0^+}\frac{3}{x^2} \qquad \lim_{x\to-\infty}(\mathrm{e}^x+\arctan x) \qquad \lim_{x\to0}(\mathrm{e}^x+\cos x)$$

Risultato: 0, $+\infty$, $-\frac{\pi}{2}$, 2.

ESERCIZIO da svolgere 4. Calcolare, scomponendo il numeratore,

$$\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{1-x}$$

Risultato: 2.

ESERCIZIO da svolgere 5. La forza di attrazione fra 2 cariche di segno opposto è, in modulo, $F(r)=C\,q_1\,q_2\,\frac{1}{r^2}$ (significativa fisicamente solo per $r>0$). Calcolare $\lim_{r\to+\infty}F(r)$ e $\lim_{r\to0^+}F(r)$ e interpretarli.
Risultato: 0 (forza nulla a distanza infinita) e $+\infty$ (forza infinita a distanza nulla).

BOZZA - DRAFT

ESERCIZIO da svolgere 6 (per lo studente volonteroso). Per $\frac{x^3-8}{x^2-2x}$ e per $\frac{4+3x-x^2}{x^2-2x-8}$ calcolare i limiti (quelli che hanno senso) per $x \to \pm\infty$, $x \to -2^{\pm}$, $x \to 0^{\pm}$, $x \to 4^{\pm}$.
Risultato per la prima: $\pm\infty$ a $\pm\infty$; -2 in -2; $+\infty$ in 0^+ e $-\infty$ in 0^-; 7 in 4. Si noti che in 2, dove la funzione non esiste, il limite è 6.
Risultato per la seconda: -1 a $\pm\infty$; $+\infty$ in -2^+ e $-\infty$ in -2^-; $-\frac{1}{2}$ in 0; $-\frac{5}{6}$ in 4.

BOZZA - DRAFT

ESERCIZIO da svolgere 7. Con il Modello Malthusiano e $a_0 := 100\,000$ scrivere i primi 7 valori, prima con $c := -0.3$ e poi con $c := 0.3$, e dire a cosa tendono.
Risultato: $100\,000,\ 70\,000,\ 49\,000,\ 34\,300,\ 24\,010,\ 16\,807,\ 11\,764.9$, tende a 0; $100\,000, 130\,000, 169\,000, 219\,700, 285\,610, 371\,293, 482\,680.9$, tende a $+\infty$.

ESERCIZIO da svolgere 8. Un farmaco ha emivita 6 ore e viene somministrato ogni 12 ore; ogni dose porta 100 mg nel sangue. Qual è il plateau subito dopo la dose? E subito prima della dose successiva? (Fra una dose e l'altra resta la frazione $r = 2^{-\tau/T}$, con τ intervallo fra le dosi e T emivita).
Risultato: $r = 2^{-12/6} = \frac{1}{4}$, plateau $\frac{100}{1-1/4} \approx 133.3$ mg; subito prima della dose $\frac{1}{4}$ di esso, ≈ 33.3 mg.

ESERCIZIO da svolgere 9. Stesso problema con emivita 48 ore e una dose al giorno da 100 mg. Perché il plateau è così più alto?
Risultato: $r = 2^{-1/2} \approx 0.707$, plateau $\frac{100}{1-0.707} \approx 341$ mg: il farmaco si elimina lentamente e si accumula molto.

BOZZA - DRAFT

ESERCIZIO da svolgere 10. Calcolare

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5}{10^k} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$$

Risultato: $\frac{50}{9} = 5.\bar{5}$ e $\frac{1}{2}$.

ESERCIZIO da svolgere 11. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+2+...+n} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \qquad \lim_{n\to+\infty} (-1)^n$$

Risultato: 0, 0, non esiste.

ESERCIZIO da svolgere 12 (esperienza pratica). Con la calcolatrice fare la radice quadrata di un numero positivo scelto a piacere, poi la radice quadrata del risultato, e così via: a quale limite tende la successione dei valori?
Risultato: 1, qualunque sia il numero di partenza.

BOZZA - DRAFT

ESERCIZIO da svolgere 13. Con la stessa logica della bora, qual è la probabilità che l'affezione duri un numero di giorni multiplo di 3?
Risultato: $\frac{1/8}{1-1/8} = \frac{1}{7}$.

BOZZA - DRAFT

Complementi

BOZZA - DRAFT

22.16 Complementi – Problema aperto: Collatz

Dato un qualsiasi numero intero $n > 1$, considera la seguente successione:

Se n è pari, allora dividilo per 2.

Se n è dispari, allora moltiplicalo per 3 e aggiungi 1.

Ripeti questo processo indefinitamente per ogni nuovo valore di n.

Si arriverà sempre al numero 1 prima o poi?

Nota. La *Congettura di Collatz* risponde sì, ma non si sa ancora dimostrarlo.

22.17 Complementi – Problema aperto: Feigenbaum

Una complessa costruzione analitica definisce una successione che numericamente, col computer, si vede tendere al numero

$$\delta = 4.6692...$$

detto costante di Feigenbaum, che ricorre ampiamente nelle Scienze, in particolare nelle Teorie del Caos e dei Frattali. Tuttavia, non si è ancora trovata una forma chiusa per quel numero, che attualmente può solo calcolarsi sperimentalmente, per così dire, e potrebbe racchiudere misteri notevoli della Matematica.

BOZZA - DRAFT

22.18 Complementi – Esperienza pratica coi limiti

Si provi con la calcolatrice a fare la radice quadrata di un numero positivo scelto a piacere, poi a fare la radice quadrata del risultato, e così via: a quale limite tende la successione dei valori?

22.19 Complementi – 4 tipi di definizioni di successioni

Semplificando al massimo, le successioni di possibile interesse Farmaceutico e Biomedico hanno definizioni di 4 tipi che ora vedremo con riferimento al loro eventuale limite.

Esempio del tipo I: successioni ricorrenti. Consideriamo ora la successione a_n di Fibonacci, a suo tempo definita per ricorrenza:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144...$$

Ci sembra, ed è vero e si potrebbe dimostrare, che i valori supereranno qualunque soglia, crescendo indefinitamente. Scriveremo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad (a_n \text{ successione di Fibonacci})$$

e il senso del limite $+\infty$ è

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad (\forall\, M)\,(\exists\, \bar{n})\; n > \bar{n} \Rightarrow a_n > M.$$

BOZZA - DRAFT

Consideriamo ora lo spazio b_n che ha a disposizione ogni microbo nel volume iniziale fisso, diciamolo 1 in qualche opportuna unità di misura, per esempio il centimetro cubo, il pollice cubo, o una unità di misura da noi inventata in modo che valga proprio 1:

$$b_n := \frac{1}{a_n}$$

I valori sono

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{13} \ldots \quad (a_n \text{ successione di Fibonacci})$$

Ci *sembra*, ed è vero e si potrebbe dimostrare (quando si definisce come più sotto), che b_n *tende a 0 per n che tende all'infinito*:

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = 0 \, .$$

Più in generale si dà il caso, con altra successione y_n, e $L \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \to +\infty} y_n = L \qquad \text{(o invece di n, qualunque variabile, p. es. } k\text{)}.$$

BOZZA - DRAFT

Il significato è di un indefinito avvicinamento, con o senza raggiungimento del limite L. Più precisamente

$$(\forall\, \varepsilon > 0)\, (\exists\, \bar{n})\, n > \bar{n} \Rightarrow |y_n - L| < \varepsilon\, .$$

Cioè, fissato un numer(ett)o positivo, chiamiamolo ε, da un certo punto in poi y_n dista dal limite meno di ε.

Esempio del tipo II: successioni definite "coi puntini".
Il fattoriale

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

assume i valori

$$1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040 \ldots$$

Si ha

$$\forall\, n > 0 \qquad n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \geq n$$

BOZZA - DRAFT

e già n tende a $+\infty$, e allora anche $n!$ che come appena visto gli sta sopra:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty} \tag{10}$$

e il senso del limite $+\infty$ è quello sopra esposto, valido per qualunque successione.
(Il fattoriale ricorre ampiamente nel Calcolo Combinatorio, nel Calcolo delle Probabilità, nelle Serie Numeriche...).
Naturalmente altre successioni definite coi puntini tendono ad altri valori, per esempio

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+2+...+n} = 0$$

com'è ovvio.

Esempio 1 del tipo III: successioni con $(-1)^n$. La successione $(-1)^n$ ha i valori

$$+1, -1, +1, -1, +1...$$

BOZZA - DRAFT

e non esiste il limite:

$$\boxed{\nexists \lim_{n \to +\infty} (-1)^n} \tag{11}$$

Questa successione consente nella programmazione informatica – per esempio con l'onnipresente in campo commerciale e scientifico Excel – di distinguere i numeri pari dai numeri dispari. (Esistono anche altri modi). In particolare

$$\frac{3 + (-1)^n}{2}$$

produce, a partire da $n := 1$, i valori

$$1, 2, 1, 2, 1, 2, 1...$$

che può consentire per esempio di produrre i turni in farmacia di Aldo e Bianca nei vari giorni dell'anno, alternandoli secondo il numero ordinale del giorno (per esempio al 1 febbraio corrisponde il numero 32, pari: lavora Bianca). Oppure per programmare con un software l'apertura automatizzata di sportellini 1 e 2, a giorni alterni, in un allevamento di animaletti.

BOZZA - DRAFT

Esempio informatico. Si consideri il display ai LED programmabile della farmacia *Al Cuore Vispo* che dispone della funzione

```
ordinalNumberOfDay
```

e vuole esporre a giorni alterni i messaggi

```
STRING(1):=Buongiorno, allegro ti sia il giorno!
STRING(2):=I nostri clienti campano cent'anni!
```

Ciò si potrà ottenere programmando qualcosa come

```
display(STRING((3+(-1)^ordinalNumberOfDay)/2))
```

Esempio 2 del tipo III: successioni con $(-1)^n$. La successione $(-1)^n \cdot n$ ha i valori

$$-1, +2, -3, +4, -5, +6, -7, +8, -9, +10...$$

e alcuni Autori dicono che va a ∞, l'infinito senza segno, ma in questa

BOZZA - DRAFT

trattazione elementare diremo invece che il limite non esiste

$$\nexists \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \cdot n$$

e similmente per successioni che oscillano senza "assestarsi".

Esempio 3 del tipo III: successioni con $(-1)^n$. La successione $\frac{(-1)^n}{10^n}$ ha i valori, per $n \geq 1$,

$$-0.1, +0.01, -0.001, +0.0001...$$

e si capisce bene che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Similmente

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$$

e similmente il limite è 0 se il numeratore è *limitato* (cioè si mantiene fra 2 numeri), e il denominatore $\to +\infty$.

Successioni del tipo IV: prolungabili ai numeri reali. Per successioni come

$$a_n := \frac{1}{n} \qquad b_n := 2^{-n} \qquad c_n := \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

BOZZA - DRAFT

che potrebbero essere prolungate ovvero "estese" ai numeri reali

$$\alpha(x) := \frac{1}{x} \qquad \beta(x) := 2^{-x} \qquad \gamma(x) := \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$$

(si noti che ciò non si può fare banalmente per i tipi I, II e III) il limite a $+\infty$ sarà trattato nella prossima lezione; per quanto sia già ora ovvio, in base a tutta la trattazione svolta, che

$$\lim_{n \to +\infty} 2^{-n} = 0 \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Invece il limite di c_n e di $\gamma(x)$ non è ovvio per niente, e lo vedremo.

BOZZA - DRAFT

22.20 Complementi – Tecnicismi sui limiti di funzioni

Ci occupiamo del comportamento di una funzione $f(x)$

$$f : I \to \mathbb{R}$$

essendo I

intervallo (p.es. $]a, b[$ o $[a, b[$ con eventualmente b infinito) oppure
unione finita di intervalli (per esempio l'unione di $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$) oppure

unione infinita non troppo "capricciosa" di intervalli (per esempio dom $\tan x$)

quando $x \to +\infty$, com'era nelle successioni, oppure

$x \to -\infty$ oppure

$x \to x_0 \in \mathbb{R}$, cioè un "numero finito":

$$\lim_{x \to_{qualcosa}} f(x)$$

Esempi.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{10}{x} = 0$ esempio termodinamico: $V = \frac{cost}{p}$ (isoterma)

al tendere all'infinito della pressione il volume andrebbe a 0, se il gas restasse ideale.

$\lim_{x \to 0^+} \frac{10}{x} = +\infty$ esempio termodinamico: $p = \frac{cost}{V}$ (isoterma)

BOZZA - DRAFT

al tendere a 0 del volume la pressione andrebbe all'infinito, se il gas restasse ideale.

La scrittura $x \to x_0^+$, qua sopra, significa che x tende a x_0 da destra ovvero da valori maggiori di x_0. E similmente esiste $x \to x_0^-$.

BOZZA - DRAFT

22.21 Complementi – Forme di indecisione dei limiti

Restano fuori queste **forme di indecisione**, da risolvere caso per caso: $+\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, ∞^0, 1^∞, 0^0. Per esempio

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} (\mathsf{e}^x - x) = \\ &\quad [= +\infty - \infty] \\ &= \lim_{x\to+\infty} x \left(\frac{\mathsf{e}^x}{x} - 1\right) = \\ &\quad = [+\infty \cdot (+\infty) =] \\ &\qquad = +\infty. \end{aligned}$$

22.22 Complementi – Limiti di successioni prolungabili

Di successioni come

$$\ln n \qquad 2^n$$

$$\varphi^n \quad \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^n$$

BOZZA - DRAFT

cioè prolungabili ovvero "estendibili" da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$, per il limite a $+\infty$ considereremo il corrispondente limite delle funzioni prolungate

$$\ln x \qquad 2^x$$

$$\varphi^x \quad \left(1-\tfrac{1}{x}\right)^x$$

cioè considereremo il limite in $\mathbb{R}$, ottenendo lo stesso risultato perché (teorema) è

$$\text{se } \lim_{x\to+\infty} f(x) = u \quad \text{allora} \quad \lim_{n\to+\infty} f(n) = u$$

Per esempio esiste un limite classico, di difficile dimostrazione matematica e ampia ricorrenza in Calcolo delle Probabilità,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

spesso detto, in una delle 2 forme soprascritte, *limite notevole del numero* e, e da esso con complicati calcoli segue

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

BOZZA - DRAFT

che ritroveremo, nella prima forma, in questioni di Farmacia.

Esempio 1.

$$\lim_{x\to+\infty}(7\,x^2 - x + 1) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2\Big(7 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\Big) =$$

che per "grandi" x è il prodotto di un numero "grande" per un numero prossimo a 7

$$= +\infty.$$

Esempio 2.

$$\lim_{x\to+\infty}(x - \sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) =$$

prodotto di 2 numeri "grandi"

$$= +\infty$$

oppure $= x\,(1 - \frac{1}{\sqrt{x}})$, prodotto di un numero "grande" per un numero prossimo a 1: in ogni caso il limite è $+\infty$.

Tutto ciò costituisce il *calcolo dei limiti*, che comunque può raggiungere più alti

BOZZA - DRAFT

livelli di sottigliezza:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4-5x^3+6-\mathsf{e}\sqrt{x}}{3x^3-\frac{1}{x}-2x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^4}-\frac{\mathsf{e}}{x^3\sqrt{x}}}{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^5}-2} = -\frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Si dimostrano

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathsf{e}^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{10^x}{x} = +\infty$$

e in effetti $\lim_{x\to+\infty} \frac{b^x}{x} = +\infty \quad b > 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg x}{x} = 0$$

e in effetti $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_b x}{x} = 0 \quad 0 < b \neq 1.$

BOZZA - DRAFT

23 Derivate – I parte

23.1 Quanto cresce, oggi, l'epidemia?[00]

Del numero di morti di un'epidemia ci interessa non solo quanti sono, ma **quanto stanno aumentando**. La derivata misura proprio questo.

Ricordiamo che la retta tangente in un punto P a una curva (anche grafico) là né spigolosa né rettilinea è la retta indicata dal righello che si appoggia alla curva toccandola o tagliandola[(5)] in un solo punto, proprio come la retta rossa e la retta verde in figura. (Negli eventuali tratti rettilinei la retta tangente li include, e nei punti spigolosi non esiste retta tangente).

Data una funzione f, si dice che il grafico ha pendenza m in un punto

[5]Localmente; eventuali intersezioni lontane non ci interessano qua.

BOZZA - DRAFT

x_0 del dominio se la retta tangente al grafico di f in x_0 ha coefficiente angolare m.

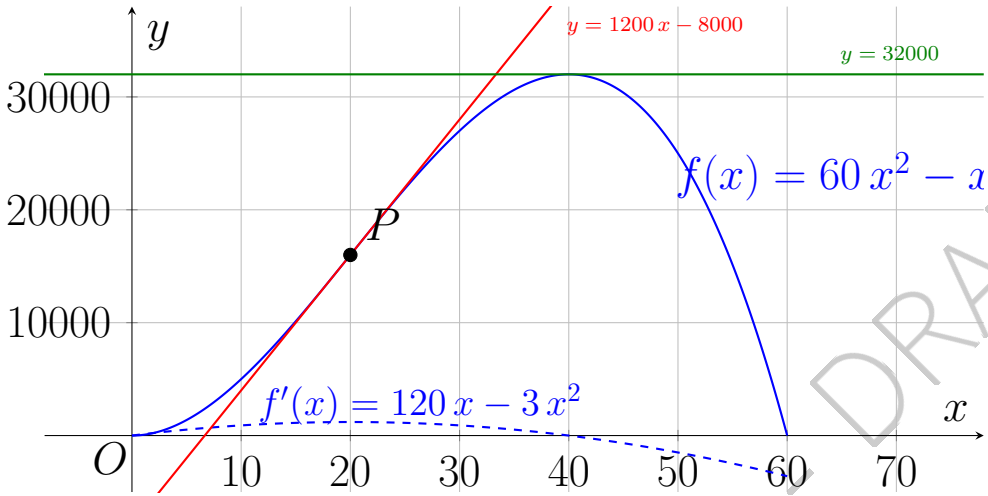
23.2 Primo esempio base sulle derivate[03]

Consideriamo per esempio la funzione

$$f(x) = 60\,x^2 - x^3 \qquad 0 \leq x \leq 60$$

che potrebbe modellizzare i morti giornalieri di un'epidemia, dal giorno 0 al giorno 60.

BOZZA - DRAFT


y
x
O
30000
20000
10000
10
20
30
40
50
60
70
P
$y = 1200\,x - 8000$
$y = 32000$
$f(x) = 60\,x^2 - x$
$f'(x) = 120\,x - 3\,x^2$

BOZZA DRAFT

Per ogni funzione f sufficientemente regolare – sostanzialmente, con grafico non spigoloso – esiste un'altra funzione f', leggi "effe primo", che si chiama derivata, che si ricava da f con regole fisse che poi mostreremo.

La derivata f' di f ha la spettacolare proprietà
che in ogni x del dominio vale quanto
la pendenza del grafico di f in x.

BOZZA - DRAFT

Nell'esempio, in $x_0 = 20$ la derivata $f'(x) = 120\,x - 3\,x^2$ vale 1200, che è proprio il coefficiente angolare della retta $y = 1200\,x - 8000$, che è la tangente in P al grafico.

Nello stesso esempio, in $x_0 = 40$ la derivata vale 0, che è proprio il coefficiente angolare della retta $y = 32000$, tangente in $(40, 32000)$ al grafico: lì c'è il **picco**.

La derivata, che nell'esempio in $x_0 = 20$ vale 1200, rappresenta il **tasso di crescita**:

in 19 la funzione f vale 14801
in 20 la funzione f vale 16000 ed è cresciuta di circa 1200
in 21 la funzione f vale 17199 ed è cresciuta di circa 1200.

La non esattezza riscontrabile, 1199 invece di 1200, è dovuta al fatto che la derivata è definita con un passaggio al limite che prevede spostamenti, in più o in meno, infinitesimi, non da 20 a 21, né da 20 a 19:

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{12}$$

L'argomento del limite si chiama *rapporto incrementale*: è l'incremen-

BOZZA - DRAFT

to della funzione diviso l'incremento della variabile.

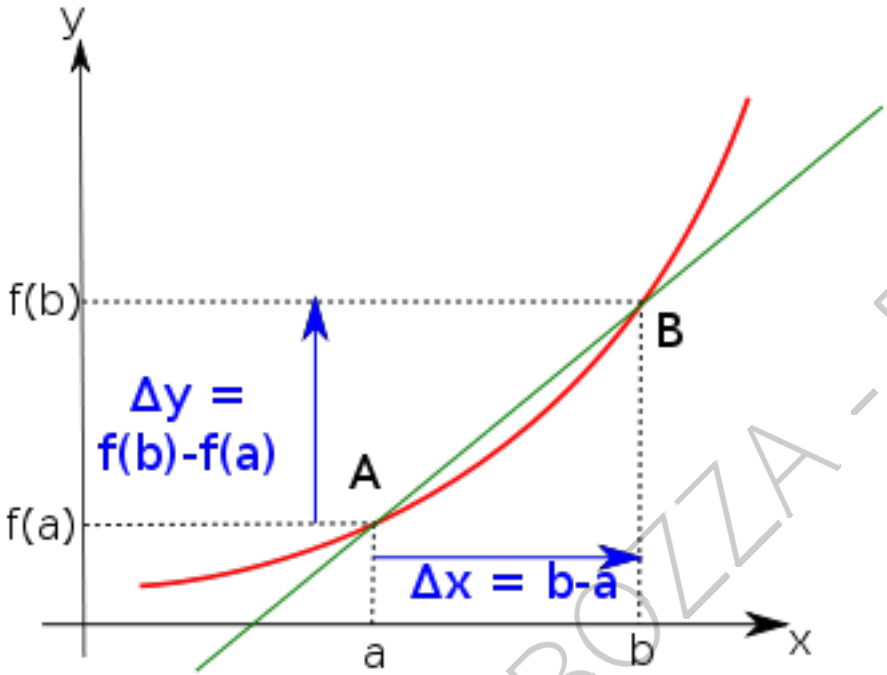


Figura 2: By Xzapro4 (2009), in Wikimedia Commons

BOZZA - DRAFT

23.3 Derivata in un punto e funzione derivata[15]

In questa trattazione elementare considereremo solo le derivate delle funzioni reali di variabile reale.

Essenzialmente, la derivata $f'(x)$ di una funzione f in un punto x è un numero oppure $+\infty$ o $-\infty$ che se esiste rappresenta la pendenza del grafico in $(x, f(x))$. Al variare di x nel dominio di f si ottiene una funzione $f'(x)$ ovvero $Df(x)$ che si chiama [funzione] derivata.

BOZZA - DRAFT

Se non esiste vuol dire che in quel punto il grafico non ammette retta tangente, per qualche sorta di sua non liscezza. La *funzione* derivata considera solo gli x in cui la derivata esiste *finita*.

La derivata $f'(x)$ in un punto x, se finita, uguaglia il coefficiente

angolare m della retta tangente in $(x, f(x))$, e anche la tangente goniometrica $\tan\alpha$ dell'angolo della (retta) tangente con l'asse x:

$$\tan\,\alpha = f'(x) = m$$

Esempi. La derivata di $|x|$ è $\frac{x}{|x|}$, che in 0 non esiste, corrispondentemente all'inesistenza della tangente al grafico in $(0,0)$ (punto spigoloso). La funzione $\sqrt[3]{x}$ ha derivata $+\infty$ in 0, e corrispondentemente in $(0,0)$ il grafico ha tangente verticale.

BOZZA - DRAFT

23.4 Notazioni per la derivata prima[19]

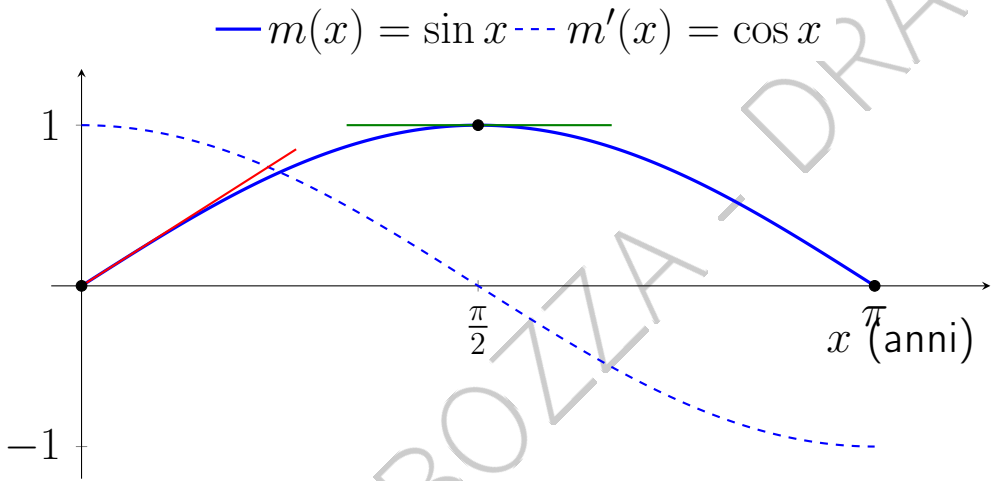
$$f'(x) \qquad Df(x) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$$

Se la variabile indipendente rappresenta il tempo, di solito indicato con t, si usa spesso anche la notazione di Newton $\dot{f}(t)$.

La derivata di $f'(x)$ è la *derivata seconda* $f''(x)$ o $f^{(2)}(x)$ eccetera.

23.5 Secondo esempio base: epidemia e sinusoide[21]

In questo semplicissimo modello il seno ci dice **quanti** muoiono al giorno, mentre il coseno che è la derivata del seno ci dice **se stanno aumentando o diminuendo, e quanto velocemente**.



BOZZA - DRAFT

Immaginiamo un'epidemia che duri circa 3.14 anni. Supponiamo che il numero di morti **al giorno** ogni 100 000 abitanti sia modellizzato

approssimatamente da

$$m(x) = \sin x, \qquad 0 \le x \le \pi,$$

dove x indica il tempo trascorso dall'inizio dell'epidemia, espresso in anni:

$$x = \frac{\text{numero di giorni dall'inizio}}{365}$$

Per esempio, al giorno zero corrisponde $x = 0$ e al giorno 365 il modello prevede

$$m(1) = \sin 1 \approx 0.84 \quad \text{morti al giorno ogni } 100\,000 \text{ abitanti}$$

(84 morti al giorno su 10 milioni di abitanti).
Alla fine dell'epidemia, per $x = \pi \approx 3.14$, il tasso torna a zero: epidemia finita.

La figura mostra la mortalità giornaliera $m(x)$ (curva blu continua) e la sua derivata $m'(x)$ (curva blu tratteggiata). La prima ci dice

BOZZA - DRAFT

quanto vale la mortalità giornaliera, la seconda ci dice **quanto rapidamente sta cambiando**.
Infatti **la derivata di sin è**[6] **cos**, come si dimostrò secoli fa:

$$m'(x) = \cos x.$$

Dunque **la pendenza della curva di mortalità nel punto di ascissa x si legge calcolando il coseno di x.**
All'inizio, $x = 0$. La mortalità parte da $m(0) = 0$, ma sta già crescendo: la pendenza iniziale, calcolata da destra, è $\cos 0 = 1$. La tangente nell'origine è dunque la retta $y = x$ (in rosso). Nei primi giorni la curva segue così da vicino la tangente che possiamo usare l'approssimazione $\sin x \approx x$.

Al picco, $x = \pi/2$. Dopo circa 573 giorni, la mortalità giornaliera

[6] Ovviamente con argomento inteso in radianti, non in gradi.

BOZZA-DRAFT

raggiunge il massimo:

$$m\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \qquad m'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Cioè in quel momento si attende **un morto al giorno ogni** $100\,000$ **abitanti** (100 morti al giorno su 10 milioni di abitanti). Lo zero indica che la curva ha **pendenza nulla**: la tangente è orizzontale (la retta verde $y = 1$). Fino a quel momento la mortalità giornaliera cresceva, da quel momento in poi diminuisce.

Il colpo d'occhio. Nella seconda metà dell'epidemia la curva continua sta ancora *sopra* l'asse orizzontale, mentre la tratteggiata sta *sotto*. La lettura epidemiologica è semplice: si verificano ancora decessi, ma il numero atteso di morti al giorno sta diminuendo. Solo per $x = \pi$ la curva continua raggiunge lo zero e il modello termina[7].

Attenzione alle unità. La derivata $m'(x) = \cos x$ esprime la variazione della mortalità giornaliera *per anno*, perché sull'asse orizzontale

BOZZA - DRAFT

[7] Per lo studente curioso: l'area sotto la curva continua vale 2, e moltiplicata per 365 dà circa 730 morti ogni 100 000 abitanti in tutta l'epidemia, cioè il bilancio finale. Ne riparleremo con gli integrali.

abbiamo posto gli anni.

Se usiamo direttamente il numero n di giorni trascorsi, la stessa curva si scrive $\sin(n/365)$ e, trattando il tempo come continuo, la sua derivata rispetto a n diventa

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\sin\left(\frac{n}{365}\right) = \frac{1}{365}\cos\left(\frac{n}{365}\right).$$

BOZZA - DRAFT

23.6 Retta tangente e linearizzazione[35]

La **tangente** al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ ha equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) \tag{13}$$

Poiché la retta tangente si mantiene vicinissima al grafico per un "buon tratto" intorno al punto $(x_0, f(x_0))$, vale l'approssimazione (*linearizzazione*), ponendo $h := x - x_0$,

$$\boxed{f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h \qquad h \approx 0} \tag{14}$$

(e spesso si preferisce il nome di variabile δ o Δ invece di h) che è una delle formule più usate in Fisica e più in generale nelle Scienze Applicate. L'approssimazione è tanto migliore quanto più h è piccolo in valore assoluto, e quanto meno il grafico di f si discosta da una retta. Per esempio per $x \approx 0$ è $\sin x \approx x$, $\ln(1+x) \approx x$, $\mathrm{e}^x \approx 1 + x$, $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$.

BOZZA - DRAFT