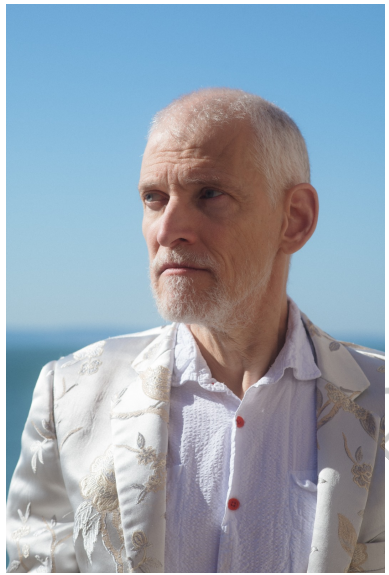
Le Compresse di Matematica per le Scienze della Farmacia

Lezioni 26-27

versione 13 novembre 2026

BOZZA - DRAFT

Università degli Studi di Trieste



Alessandro Soranzo
Ricercatore universitario
Settore Scientifico Disciplinare:
MATH-03/A - Analisi matematica
Gruppo Scientifico Disciplinare:
01/MATH-03 - Analisi matematica, probabilità e statistica matematica

BOZZA - DRAFT

Indice

26 L'integrale indefinito e definito **6**

26.1 Introduzione all'integrale indefinito [10] 6
26.2 Alcuni integrali indefiniti [14] 8
26.3 La costante additiva dell'integrale indefinito [18] 9
26.4 Le 3 formule della linearità dell'integrale [21] 10
26.5 Complementi – Altre formule sull'integrale 13
26.6 Un altro integrale: l'integrale definito [25] 14
26.7 Legami fra integrale indefinito, definito, derivata [29] . . 18
26.8 Complementi – I morti fino al giorno z 19
26.9 In Farmacia: area under the curve [33] 23
26.10 L'indice glicemico e l'indice insulinico [37] 25
26.11 La clearance dei farmaci [40] 26
26.12 Esempi dell'integrale definito [44] 28
26.13 Altri 3 teoremi sugli integrali [48] 30
26.14 Complementi – Integrale del logaritmo naturale . . . 33

BOZZA - DRAFT

26.15Complementi – Note sulle equazioni differenziali . . . 34
26.16Complementi – Note finali sulle funzioni elementari . 37

27 Introduzione al Calcolo delle Probabilità 43
27.1 Inquadramento della questione [52] 44
27.2 La concezione frequentista della probabilità [56] 45
27.3 La mortalità [59] 48
27.4 La concezione classica della probabilità [03] 51
27.5 Concezione soggettiva della probabilità [07] 56
27.6 Concezione assiomatica della probabilità [11] 63
27.7 L'evento impossibile fa inghippi che fuggiremo [15] . . . 66
27.8 Mortalità e letalità di una malattia o infezione [18] . . . 67
27.9 La letalità apre una finestra su un baratro teorico [22] . 70
27.10Mettiamo in dubbio l'esistenza della probabilità [26] . . 74
27.11Indipendenza degli eventi [30] 75
27.12Alcuni teoremi ovvi sulla probabilità [34] 77
27.13Formula di Bayes [37] 77

BOZZA - DRAFT

27.14Legge delle Alternative [41] 78
27.15Alcune note finali [45] 79
27.16ESERCIZI SULLA LEZIONE 27 82

BOZZA - DRAFT

26 L'integrale indefinito e definito

26.1 Introduzione all'integrale indefinito [10]

Abbiamo visto come rispondere[1] alla domanda

Qual è la derivata di questa funzione?

Ma nelle Scienze Applicate talvolta si deve rispondere a questa domanda in qualche modo inversa:

Di quale/i funzione/i è derivata questa funzione?

Per esempio qual è la velocità, nota l'accelerazione, sapendo che

accelerazione = D velocità

BOZZA - DRAFT

[1] In generale e salvo funzioni capricciose: già $|x|$ crea problemi, non avendo derivata in 0.

L'integrale indefinito è l'"*anti-derivata*":

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$$

$$\Leftarrow \quad \frac{1}{1+x^2} = D\left(\arctan x + c\right).$$

Possiamo quasi dire che il segno d'integrale può fare il "salto dell'uguale" trasformandosi in derivata, come la radice cubica fa il "salto" trasformandosi nel cubo, per esempio $\sqrt[3]{x} = 2$ equivale a $x = 2^3$.

L'integrale indefinito risponde alla domanda:
"Di cos'è la derivata?"

Il termine "$+c$" ci ricorda che non solo $\arctan x$ ha derivata $\frac{1}{1+x^2}$, ma anche $\arctan x + 99$ o più qualunque numero reale c. Allora l'integrale indefinito è un insieme di funzioni.
Ciascuna di quelle funzioni si chiama *primitiva* di f.

BOZZA - DRAFT

26.2 Alcuni integrali indefiniti [14]

Seguendo dalle derivate, ci proponiamo di imparare queste formule:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$$

$$\forall\,\alpha \qquad \int \alpha\,dx = \alpha x + c$$

in particolare:

$$\int 0\,dx = c$$

$$\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x + c$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\forall\,\alpha \neq -1 \qquad \int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

in particolare

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + c$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

Nota: non diamo alcun significato al termine dx.

BOZZA - DRAFT

Possiamo quasi dire che il segno d'integrale può fare il "salto dell'uguale" trasformandosi in derivata, come $\sqrt[3]{}$ fa il salto trasformandosi in ^{3}.

Si guardi per esempio $\arctan$, il primo integrale della lista.

E si noti che avendo e^x derivata e^x avviene che e^x ha integrale indefinito $\mathrm{e}^x + c$.

26.3 La costante additiva dell'integrale indefinito [18]

Al posto del $+c$ delle sopra dette formule d'integrazione indefinita, altri Autori scrivono $+k$ o +cost, o quant'altro, e senza errare troppo immaginiamo che vi sia 0, pur scrivendo formalmente $+c$. (La questione tecnicamente è più sottile).

DRAFT

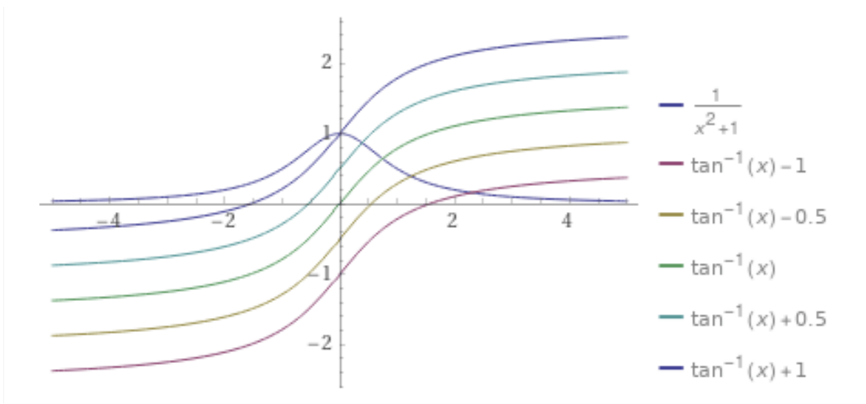


Figura 1: Disegno del grafico di $\frac{1}{1+x^2}$ e di alcune delle funzioni del suo integrale indefinito $\arctan x + c$, cioè alcune primitive. (Screenshot da WolframAlpha).

Per il Lettore interessato:

Quella simbologia va intesa come la somma di una qualunque costante in ognuno degli intervalli massimali contenuti nel dominio dell'integranda, che è questione un po' sottile, ma senza errare troppo immaginiamo che sia 1 stessa costante su tutto il dominio, liberamente scelta in $\mathbb{R}$. Per esempio 3, o -5, e spesso 0.
Per esempio l'integrale indefinito di $\frac{1}{x}$ è $\ln|x| + c$ e il dominio dell'integranda è costituito dai 2 intervalli $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$ e per ciascuno di essi si avrà una costante da sommare a $\ln x$, in modo indipendente). Per esempio $\ln(-x) + 3$ per $x < 0$ e $\ln x + 5$ per $x > 0$.

26.4 Le 3 formule della linearità dell'integrale [21]

L'integrale della somma è la somma degli integrali (1)

Il simbolo di integrale "passa sopra" il $+$

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

L'integrale della differenza è la differenza degli integrali (2)

Il simbolo di integrale "passa sopra" il $-$

$$\int (f(x) - g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

Le costanti moltiplicative escono dagli integrali (3)

Il simbolo di integrale "lascia uscire" $c\cdot$

$$\int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

Esistono molte altre formule oltre alle 3 formule della linearità.

BOZZA - DRAFT

Esempio 1 L'integrale indefinito di $x + \frac{1}{1+x^2}$ è $\frac{x^2}{2} + \arctan x + c$, così:

$$\diamond \qquad \int \left(x + \frac{1}{1+x^2} \right) dx =$$

$$=^{(1)} \int x\, dx + \int \frac{1}{1+x^2}\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \arctan x + c$$

Esempio 2

$$\diamond \qquad \int (x^3 + 2\,x^2 + 3\,x)\, dx =$$

$$=^{(1)} \int x^3\, dx + \int 2\,x^2\, dx + \int 3\,x\, dx =$$

$$=^{(??)} \int x^3\, dx + 2 \int x^2\, dx + 3 \int x\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\, x^4 + \frac{2}{3}\, x^3 + \frac{3}{2}\, x^2 + c\,. \qquad \text{[Verificare derivando]}$$

BOZZA - DRAFT

Esempio 3

$$\diamond \qquad \int (\sin x + 3\cos x + 7)\, dx =$$

$$=^{(1)} \int \sin x\, dx + \int 3\cos x\, dx + \int 7\, dx =$$

$$=^{(??)} (-\cos x + c_1) + 3\int \cos x\, dx + (7x + c_2) =$$

$$= (-\cos x + c_1) + 3\,(\sin x + c_3) + (7x + c_2) =$$

chiamiamo c la somma delle 3 costanti d'integrazione c_1, c_2 e c_3

$$= -\cos x + 3\sin x + 7x + c\,. \quad \text{[Verificare derivando]}$$

BOZZA - DRAFT

26.5 Complementi – Altre formule sull'integrale

Integrazione per parti:

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx \tag{4}$$

Esempio: $\int \mathrm{e}^x\,x\,dx = \mathrm{e}^x\,x - \int \mathrm{e}^x\cdot 1\,dx = \mathrm{e}^x\,x - \mathrm{e}^x + c$

Integrazione per sostituzione $y := mx + q$:

$$\int f(m\,x+q)\,dx = \frac{1}{m}\Big(\int f(y)\,dy\Big)_{y=m\,x+q} \quad \forall\, m,q\in\mathbb{R}, m\neq 0. \tag{5}$$

(Una formula più complicata che non diamo permette una sostituzione più generale $y := g(x)$, ed è là che si dà senso al dx).

Esempio, fatto questa volta con variabile di integrazione t:

$$\begin{aligned}
&\diamond \int \cos(2\,t+3)\,dt =^{(5)}\\
&= \frac{1}{2}\Big(\int \cos(t)\,dx\Big)_{t=2\,x+3} =\\
&= \frac{1}{2}\Big(\sin(t)+k\Big)_{t=2\,x+3} =\\
&= \frac{1}{2}\sin(2\,t+3)+c\,. \qquad \text{[Verificare derivando]}
\end{aligned}$$

BOZZA - DRAFT

26.6 Un altro integrale: l'integrale definito [25]

Se conosciamo il numero di morti di ogni giorno di un'epidemia, come possiamo calcolare il numero totale di morti dall'inizio dell'epidemia fino a un certo giorno z? È facile convincersi che

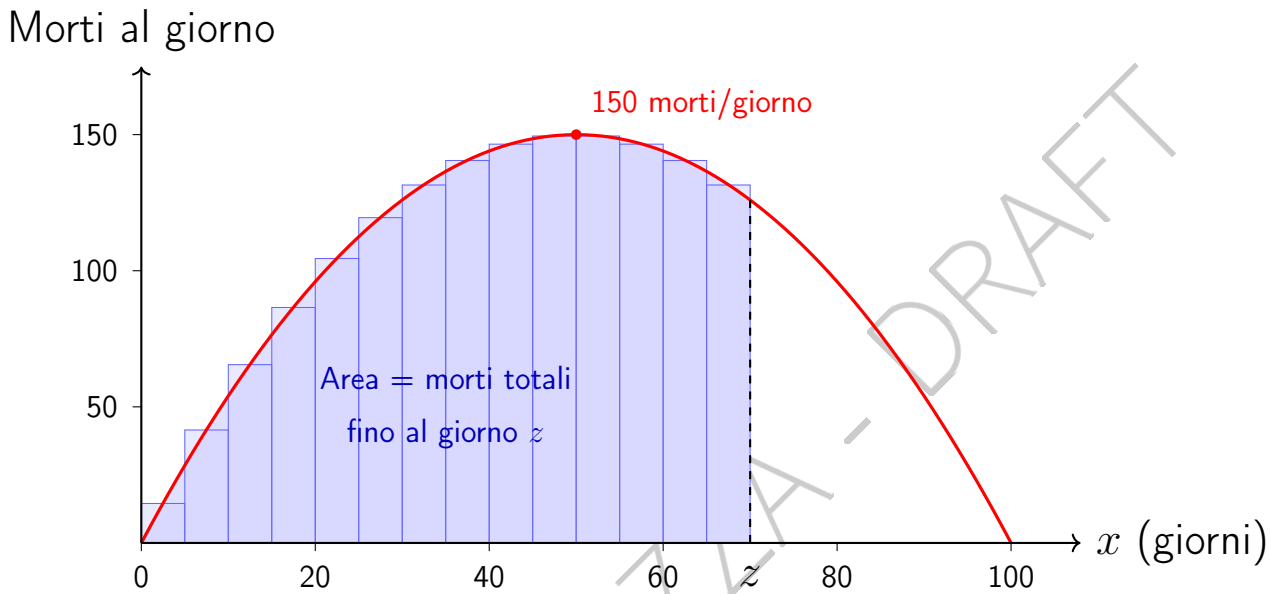
numero di morti = area da 0 a z
sotto la curva del numero di morti giornaliero

Questo è un primo di infiniti casi in cui interessa l'area sotto il grafico di una $f(x)$.

L'area da a a b sotto il grafico di f positiva si chiama integrale definito di f da a a b:

$$\boxed{\text{area sotto il grafico di } f \text{ da } a \text{ a } b = \int_a^b f(x)\,dx} \qquad (6)$$

BOZZA - DRAFT



Sottografico in azzurro.

BOZZA - DRAFT

Qualche dettaglio nel caso dell'epidemia. Supponiamo che un'epidemia duri 100 giorni.

Il primo giorno muoiono poche persone, poi il numero dei morti giornalieri aumenta, raggiunge un massimo e infine diminuisce, fino ad annullarsi al termine dell'epidemia.

Indichiamo con $f(x)$ il numero di morti al giorno, dove x rappresenta il tempo, in giorni.

Se rappresentiamo i dati mediante un diagramma a sbarrette, **ogni sbarretta verticale rappresenta il numero di persone morte in un determinato giorno**.

Il numero totale dei morti fino al giorno z si ottiene semplicemente sommando i morti di tutti i giorni dal primo al giorno z:

$$\underbrace{m_1 + m_2 + \cdots + m_z}_{\text{morti totali fino al giorno } z}.$$

Ma c'è un altro modo di interpretare questa somma: **ogni sbarretta ha larghezza un giorno e altezza uguale al numero di morti al giorno**. La sua area rappresenta quindi il numero di morti di quel giorno.

Sommando le aree delle prime z sbarrette, otteniamo il numero totale dei morti fino al giorno z.

Dalle sbarrette all'area sotto una curva

Supponiamo ora di descrivere l'andamento dell'epidemia mediante la funzione continua

$$f(x) = 0.06\,x(100 - x), \qquad 0 \le x \le 100.$$

Questa funzione descrive un'epidemia in cui il numero di morti al giorno inizialmente aumenta, raggiunge il massimo di 150 al giorno quando $x = 50$, e infine diminuisce fino a zero.

Nel grafico seguente le sbarrette rappresentano intervalli di cinque giorni, per rendere la figura più leggibile. Ogni sbarretta ha altezza uguale alla media dei morti giornalieri in quei cinque giorni. Le sbarrette sono disegnate solo fino al giorno z (nella figura, $z = 70$).

Le sbarrette rappresentano i morti in intervalli di cinque giorni; la curva rossa rappresenta il numero di morti al giorno previsto dal modello. L'area sotto la curva da 0 a z è uguale al numero totale di morti dall'inizio dell'epidemia fino al giorno z.

BOZZA - DRAFT

Nasce l'integrale definito

Possiamo immaginare di suddividere l'intervallo di tempo da 0 a z in intervalli sempre più piccoli.

Invece di considerare sbarrette larghe cinque giorni, possiamo considerare sbarrette larghe un giorno, mezza giornata, un'ora, un minuto, e così via.

Quanto più sottili diventano le sbarrette, tanto meglio esse seguono l'andamento della curva.

Al limite, quando la larghezza delle sbarrette tende a zero, la somma delle loro aree diventa l'area sotto la curva fra 0 e z.

Questa operazione matematica si chiama **integrale definito** e si indica con

$$\boxed{\int_0^z f(x)\,dx}$$

I numeri 0 e z indicano gli estremi dell'intervallo di tempo considerato: si parte dall'inizio dell'epidemia e ci si ferma al giorno z.

La quantità dx indica una larghezza infinitesima lungo l'asse del tempo.

Informalmente, possiamo pensare a $f(x)\,dx$ come all'area di una sbarretta infinitamente sottile.

Sommando tutte queste aree infinitesime, otteniamo l'area totale sotto la curva fra 0 e z.

Nel nostro esempio:

$$\boxed{\text{Morti totali fino al giorno } z = \int_0^z f(x)\,dx}$$

Osserviamo che le lettere x e z hanno ruoli diversi: x è la variabile che scorre lungo l'asse del tempo mentre sommiamo le sbarrette, da 0 fino a z; z invece è il giorno, fissato, in cui ci fermiamo. Il risultato dell'integrale dipende solo da z.

BOZZA - DRAFT

26.7 Legami fra integrale indefinito, definito, derivata [29]

L'integrale definito $\int_a^b$ è legato all'integrale indefinito $\int$ così:

$$\boxed{\begin{array}{l} F = \int f \quad \text{tolto il } +c \\ \\ \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \end{array}} \tag{7}$$

Si noti che
il sottografico è una figura piana (insieme di punti del piano),
l'integrale definito è un numero,
la primitiva è una funzione,
l'integrale indefinito è un insieme di funzioni.

con cioè essendo F una qualunque primitiva (ovvero "anti-derivata") di f, cioè in pratica, salvo il $+c$ che comunque si può mettere 0, un integrale indefinito di f. (La (7) così scritta non piacerà ai puristi). Ecco allora che saper calcolare gli integrali indefiniti permette di calcolare gli integrali definiti e quindi le aree.

E già sappiamo che

$$F' = f$$

e con questo abbiamo completato di esprimere i legami fra integrale indefinito, definito, derivata.

BOZZA - DRAFT

26.8 Complementi – I morti fino al giorno z

Ricordiamo che

$$f(x) = 0.06\,x(100 - x) = 6x - 0.06x^2.$$

Indichiamo con $F(z)$ il numero totale di morti fino al giorno z:

$$F(z) = \int_0^z f(x)\,dx.$$

Per calcolare l'integrale utilizziamo le regole del calcolo integrale:

$$\begin{aligned} F(z) = \int_0^z f(x)\,dx &= \int_0^z (6x - 0.06x^2)\,dx \\ &= \left[3x^2 - 0.02x^3\right]_0^z \\ &= 3z^2 - 0.02z^3. \end{aligned}$$

Dunque:

$$\boxed{F(z) = 3z^2 - 0.02z^3}$$

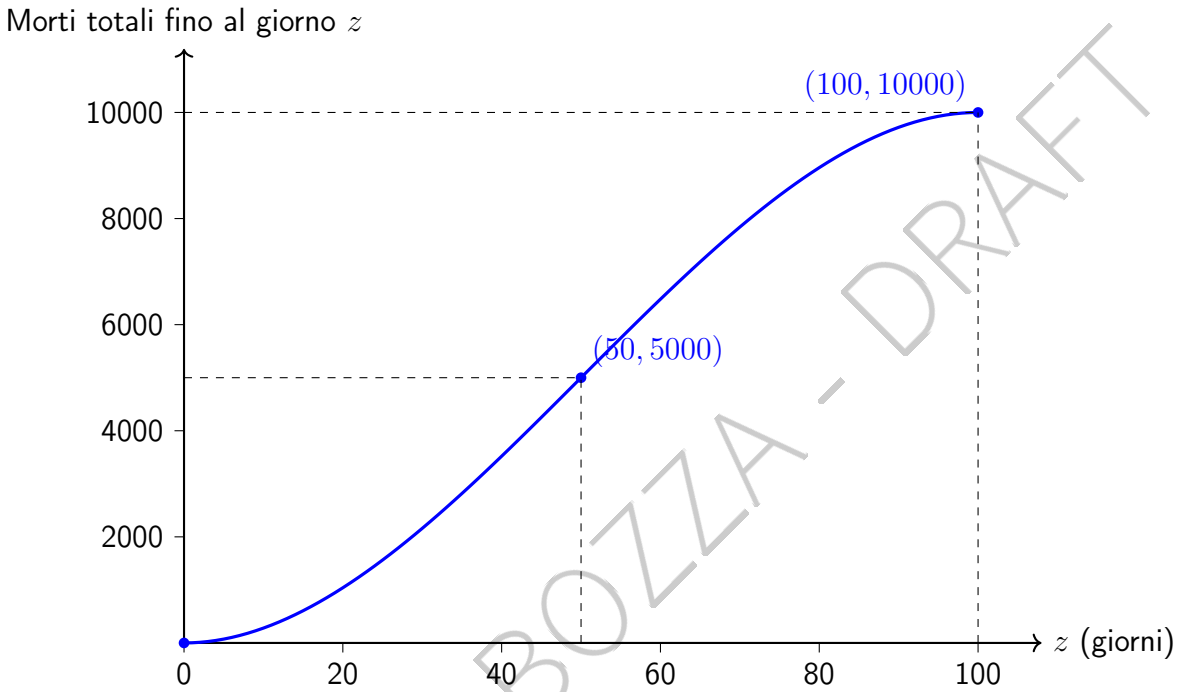
Osserviamo alcuni valori significativi:

$$F(0) = 0, \qquad F(50) = 5000, \qquad F(100) = 10000.$$

Quindi:

- all'inizio dell'epidemia, al giorno 0, i morti totali sono 0;
- fino al giorno 50 i morti totali sono già 5000;
- fino al giorno 100, quando l'epidemia termina, i morti totali sono 10000; da quel giorno in poi questo numero non aumenta più.

BOZZA - DRAFT



BOZZA - DRAFT

La curva blu rappresenta la funzione $F(z)$: per ogni giorno z, indica quanti morti ci sono stati in totale dall'inizio dell'epidemia fino a quel giorno.

Sottigliezze per Lettore interessato

Il significato delle unità di misura

L'altezza della curva $f(x)$ rappresenta un numero di *morti al giorno*, mentre la larghezza delle sbarrette rappresenta un numero di *giorni*.
Moltiplicando:

$$\frac{\text{morti}}{\text{giorno}} \cdot \text{giorni} = \text{morti}.$$

Questo spiega perché l'area sotto la curva rappresenta un numero di morti, e non un numero di morti al giorno.

Come si leggono insieme i due grafici

Il primo grafico e il secondo grafico descrivono la stessa epidemia, ma da due punti di vista diversi:

- il grafico di f descrive **quanti morti ci sono in un giorno**;
- il grafico di F descrive **quanti morti ci sono stati in totale fino a quel giorno**.

In altre parole:

$$\boxed{f(z) = \text{morti del giorno } z}$$

$$\boxed{F(z) = \int_0^z f(x)\,dx = \text{morti totali fino al giorno } z}$$

Il legame fondamentale fra le due funzioni è questo:

$$\boxed{F'(z) = f(z)}$$

Ciò significa che **la pendenza della curva** F in un certo giorno z è proprio uguale al numero di morti di quel giorno.

In conclusione: la funzione $f(x)$ descrive la velocità con cui si accumulano i morti, mentre l'integrale definito

$$\int_0^z f(x)\,dx$$

descrive il numero totale di morti dall'inizio dell'epidemia fino al giorno z.

Questo fatto si interpreta così:

BOZZA - DRAFT

- all'inizio dell'epidemia ci sono pochi morti al giorno, quindi la curva cumulativa cresce lentamente;
- quando l'epidemia si intensifica, i morti giornalieri aumentano e la curva cumulativa diventa sempre più ripida;
- nel giorno in cui i morti giornalieri sono massimi (nel nostro esempio il giorno 50), la curva cumulativa ha la pendenza massima;
- dopo il picco, i morti giornalieri diminuiscono: la curva cumulativa continua a salire, ma sempre più lentamente;
- alla fine dell'epidemia i morti giornalieri tornano a zero, e quindi la curva cumulativa si appiattisce, raggiungendo il valore finale di 10000.

Attenzione: in questo esempio l'integrale rappresenta un'area geometrica perché $f(x) \geq 0$. Più in generale, l'integrale definito calcola un'area con segno: le parti sotto l'asse delle ascisse contribuiscono negativamente.

In sintesi: l'integrale definito permette di passare da una quantità *istantanea* (i morti al giorno) a una quantità *cumulativa* (i morti complessivi).

Perciò, se $f(t)$ rappresenta i morti al giorno, allora

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

rappresenta il numero di persone morte fra il giorno a e il giorno b.

BOZZA - DRAFT

26.9 In Farmacia: area under the curve [33]

Veniamo alla Farmacia. Leggiamo su Wikipedia[(2)] (in italiano), l'enciclopedia libera, alla voce *Area Under the Curve*,

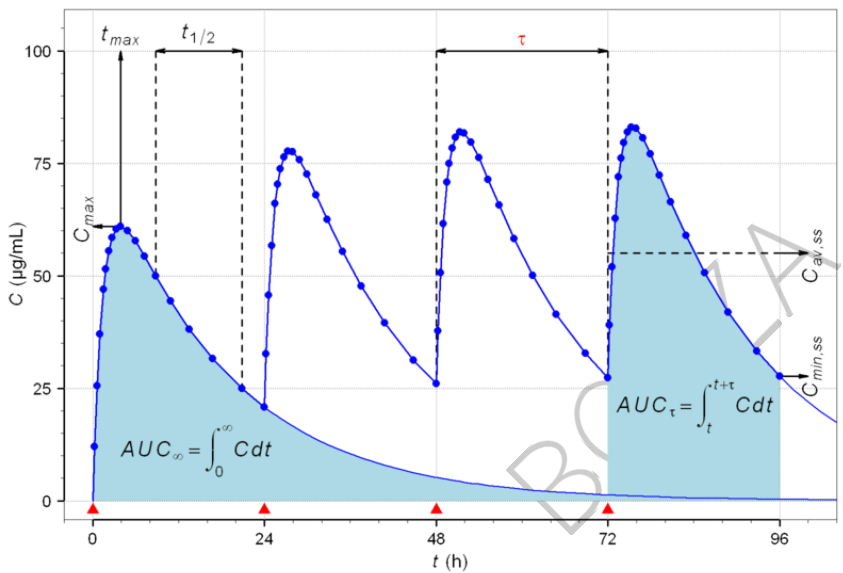
> L'area sotto la curva concentrazione/tempo o AUC (dalla dicitura inglese area under the time/concentration curve, ovvero area sottesa alla curva) è un parametro farmacocinetico dato dall'integrale in un grafico concentrazione/tempo (...)
> Tale parametro è fondamentale per poter descrivere l'effetto dei farmaci poiché riflette l'esposizione dei tessuti al farmaco nel tempo.
> L'AUC (da zero a infinito) rappresenta l'esposizione totale al farmaco in funzione del tempo (...)
> Per indicare l'AUC riferita ad un particolare intervallo temporale si utilizzano i pedici, ad esempio AUC_{4-8h} indica l'area sotto la curva nell'intervallo di tempo che va da 4 a 8 ore.

[2] Letto il 3 febbraio 2020

BOZZA - DRAFT

Cioè, e si veda la figura sulla citata pagina di Wikipedia,

$$AUC_\infty := \int_0^{+\infty} concentrazione(t)\, dt$$



BOZZA - DRAFT

Figura 2: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Linear_PK_Example.png. By Helmut Schütz.

26.10 L'indice glicemico e l'indice insulinico [37]

Un'applicazione molto vicina alla Farmacia è l'area sotto il grafico che esprime la concentrazione di glucosio nel sangue all'avanzare del tempo dopo l'assunzione di un pasto; si veda questa figura di Wikimedia Commons: link->; ciò serve a definire l'indice glicemico degli alimenti:

> The glycemic index of a food is defined as the incremental area under the two-hour blood glucose response curve (AUC) following a 12-hour fast and ingestion of a food with a certain quantity of available carbohydrate (usually 50 g). (Da Wikipedia (in inglese), l'enciclopedia libera alla voce *Glycemic index*.)

Quel grafico viene certo da analisi del sangue, ma può anche essere modellizzato matematicamente con funzioni, per ulteriori ricerche: link->. (Il quel testo, si noti che *in silico* = col computer; è un

BOZZA - DRAFT

aggiornamento dei classici *in vitro* e *in vivo*).

Similmente l'indice insulinico:

> Glucose (glycemic) and insulin scores were determined by feeding 1000 kilojoules (239 kilocalories) of the food to the participants and recording the area under the glucose/insulin curve for 120 minutes then dividing by the area under the glucose/insulin curve for white bread. The result being that all scores are relative to white bread. . (Da Wikipedia (in inglese), l'enciclopedia libera alla voce *Insulin index*.)

26.11 La clearance dei farmaci [40]

Considerando una dose D di farmaco e la sua AUC che ne deriva, si definisce *clearance* del farmaco il loro rapporto:

$$\text{clearance: } Cl = \frac{D}{AUC}$$

La clearance indica quanto velocemente il plasma si ripulisce da un farmaco

BOZZA - DRAFT

Nota. In pratica:

Caso	Cosa succede	Effetto sull'AUC
Clearance alta	Eliminazione rapida	AUC piccola
Clearance bassa	Eliminazione lenta	AUC grande
Dose più alta	Più farmaco assorbito	AUC più grande (proporz.)

Ma le applicazioni degli integrali sono veramente innumerevoli.[3]

[3] In ambito Biomedico, si consideri la funzione $f(t)$ che esprime in millilitri all'ora il flusso di un liquido in un tubo, anatomico o artificiale: l'area in questione, da t_1 a t_2 in ore, rappresenta la quantità di liquido fluito, in millilitri; e ovviamente millilitri e ore possono essere cambiati con altre unità di misura di volume e tempo. Quella quantità sarà proprio $\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$.
Si consideri, ancora, la determinazione delle aree geometriche, di figure definite dal loro bordo inteso come grafico di una funzione: ciò può servire nella progettazione di protesi anatomiche (Ingegneria Biomedica) o di reattori chimici per la produzione di farmaci.

BOZZA - DRAFT

26.12 Esempi dell'integrale definito [44]

Applicheremo la formula (7) che qua ripetiamo:

$$\begin{gathered} F = \int f \quad \text{tolto il } +c \\ \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \end{gathered} \tag{8}$$

Esempio 1. Calcoliamo l'area del sottografico dell'iperbole equilatera di equazione $y := \frac{1}{x}$ da 1 a 7:

$$\int_1^7 \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^7 = \ln 7 - \ln 1 = \ln 7$$

ed è ben evidente che il numero 7 si può sostituire con qualunque numero t, ottenendosi il significato geometrico del logaritmo. Se $0 < t < 1$ il logaritmo naturale è negativo, e infatti l'area del sottografico, da intendersi come *area con segno*, è negativa perché la base viene percorsa da 1 a t in verso contrario all'orientazione dell'asse x. Si disegni l'iperbole e si stimi (dall'area) $\ln 10$.

BOZZA - DRAFT

Esempio 2. Calcoliamo l'area sotto una "campata" della sinusoide, da 0 a π:

$$\int_0^\pi \sin x\, dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2.$$

Esempio 3. Per un processo termodinamico isotermico reversibile:

$$Lavoro = -\int_{V_{iniziale}}^{V_{finale}} \frac{n\,R\,T}{V}\, dV =$$

per linearità dell'integrale definito, come pure indefinito,

$$= -n\,R\,T \int_{V_{iniziale}}^{V_{finale}} \frac{1}{V}\, dV =$$

$$= -n\,R\,T\,[\ln V]_{V_{iniziale}}^{V_{finale}} =$$

$$= -n\,R\,T\,(\ln V_{finale} - \ln V_{iniziale}) =$$

$$= -n\,R\,T\,\ln \frac{V_{finale}}{V_{iniziale}}.$$

Per il Lettore interessato, qualche dettaglio di Fisica.

Leggiamo su Wikipedia (in inglese), l'enciclopedia libera, alla voce *Isothermal process*:

By convention, work is defined as the work on the system by its surroundings. If, for example, the system is compressed, then the work is positive and the internal energy of the system increases. Conversely, if the system expands, it does work on the surroundings and the internal energy of the system decreases.

BOZZA - DRAFT

26.13 Altri 3 teoremi sugli integrali [48]

• **Teorema fondamentale del Calcolo Integrale**

$$D \int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

• **Scambio degli estremi di integrazione.**
Dalla definizione – come l'abbiamo data – segue subito che

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

• **Regola di Chasles.** (Qua scritta senza i dx per semplicità).
Per ogni $a, b, c \in$ dom f, in qualunque ordine,

$$\boxed{\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b} \tag{9}$$

La Regola di Chasles permette per esempio di calcolare l'integrale da -3 a 5 di $|x|$ sommando l'integrale di $-x$ da -3 a 0 con l'integrale di x da 0 a 5.

È ben evidente che la Regola di Chasles permette di "rompere" in 2 parti più semplici gli integrali col valore assoluto.

BOZZA - DRAFT

ESERCIZIO$_{\mu 2021}$ $\approx$ Approssimando $\arctan(20)$ con $\arctan(+\infty)$, calcolare

$$\int_{-20}^{20} f(t)\,dt, \qquad f(t) := \frac{1}{1+t^2}$$

e potrà essere utile questa tavola di valori, dove ovviamente l'infinito va inteso nel senso del limite:

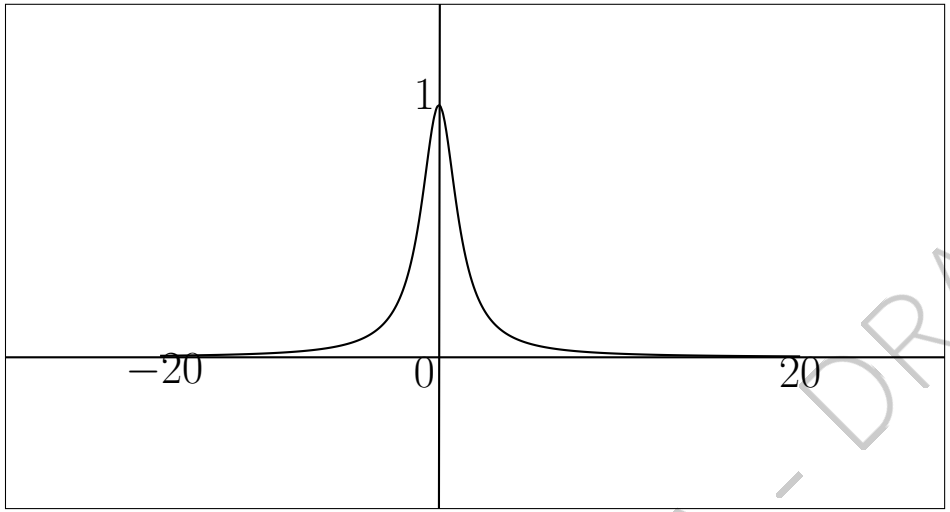
x	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$	
$\arctan x$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$(\arctan(-x) = -\arctan x)$

Di questa questione possiamo dare un'interessante interpretazione, seppure non serva per risolvere il quesito. Il numero di morti di un'epidemia, in migliaia, sia approssimatamente modellizzato dalla $f(t)$ considerata, per $-20 \le t \le 20$ essendo t il tempo, dal giorno $t = -20$ (per esempio 11 dicembre 2020) al tempo $t = 20$ (20 gennaio 2021). (Per esempio, vediamo che nel giorno di picco $t = 0 = 31$ dicembre 2020 il modello dà 1000 morti).
Allora ovviamente l'area espressa dall'integrale considerato dà, molto approssimativamente, il numero complessivo di morti, in migliaia.

Per il Lettore interessato, qualche osservazione su questa epidemia.

È stata un'epidemia molto intensa solo per breve tempo, con un'ascesa verso il picco e una discesa in certo qual modo rapidissime, con buona parte dei morti concentrati in una settimana, molto diversa dalla pandemia attuale (2020-2021), per la quale – nemmeno per la sola Italia – una formula semplicissima come quella dell'esercizio non può bastare. Ecco alcuni valori dati dalla funzione dell'esercizio:
31 dicembre 1000 morti
1 gennaio 500 morti
2 gennaio 200 morti
3 gennaio 100 morti

BOZZA - DRAFT



SVOLGIMENTO

$$\int_{-20}^{20} \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= [\arctan t]_{-20}^{20} =$$

$$= \arctan(20) - \arctan(-20) =$$

per la disparità dell'arcotangente ricordata nella tavola

$$= \arctan(20) - (-\arctan(20)) =$$

Se invece dell'integrale, con un computer (o a mano con molta pazienza) sommiamo i morti previsti dal modello per i 41 giorni dell'epidemia, si ha, molto più precisamente,

$$\sum_{t=-20}^{20} \frac{1}{1+t^2} \approx 3.056$$

cioè ≈ 3056 morti.

BOZZA - DRAFT

$$= 2 \arctan(20) \approx 2 \arctan(+\infty) = 2\,\frac{\pi}{2} = \pi \approx$$

$$\boxed{\approx 3.14}$$

(e nell'interpretazione dell'epidemia corrisponde a circa 3140 morti, diciamo pure "circa 3000 morti" a causa delle grossolane approssimazioni).

26.14 Complementi – Integrale del logaritmo naturale

Con la formula di integrazione per parti, intendendo $\ln x$ come $1 \cdot \ln x$, si può trovare l'integrale di $\ln x$:

$$\int \ln x\, dx = \quad \text{moltiplichiamo per 1}$$

$$= \int 1 \cdot \ln x\, dx = \quad \text{riconosciamo } D\, x = 1$$

$$= \int (D\, x) \cdot \ln x\, dx =$$

con la (4)

$$= x\, \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx =$$

BOZZA DRAFT

$$= x \ln x - \int 1 \, dx =$$

$$= x \ln x - x + c \,. \quad \text{[Verificare derivando]}$$

Con questo procedimento e con la formula di cambiamento di base e con la (**??**) si calcoli l'integrale del logaritmo decimale.

26.15 Complementi – Note sulle equazioni differenziali

Già sappiamo risolvere la

$$(1+t^2)\, y'(t) = 1 \qquad \text{altrimenti scritta } (1+t^2)\, y' = 1$$

cioè la

$$y'(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

trovando

$$y(t) = \arctan t + c$$

Con WolframAlpha: `Solve[(1+t^2)y'=1]` dà $y(t) = c_1 + \tan^{-1}(t)$

Equazioni differenziali risolubili con un'integrazione Talvolta nelle Scienze Applicate si è interessati a trovare una funzione del tempo, sia essa $y(t)$, di cui per motivi fisici (in senso lato) si conosce la derivata, sia essa $g(t)$:

$$y'(t) = g(t) \quad y\ incognita \quad g\ nota$$

BOZZA - DRAFT

Se g è sufficientemente regolare ovvero non "capricciosa", ovviamente le infinite soluzioni dell'*equazione differenziale* sopra scritta costituiscono l'integrale indefinito di g:

$$y(t) = \int g(t)\,dt$$

che, detta $G(t)$ una qualunque primitiva di $g(t)$, sono le infinite

$$= G(t) + cost$$

Per esempio per un oggetto che cade verticalmente presso la Terra in assenza di aria si sa che la derivata della velocità $v(t)$, cioè l'accelerazione, è ≈9.81:

$$v'(t) = 9.81$$

$$\Rightarrow v(t) = \int 9.81\,dt$$

$$\Rightarrow v(t) = 9.81\,t + c$$

e ponendo in quest'ultima $t = 0$, cioè il tempo d'inizio della caduta, si trova

$$c = v(0)$$

che magari vorremo indicare con $v_{iniziale}$ ottenendosi infine

$$v(t) = 9.81\,t + v_{iniziale}$$

e similmente sulla Luna, già di suo priva di aria,

$$v(t) = 1.62\,t + v_{iniziale} \qquad \text{(Luna)}$$

BOZZA - DRAFT

(e ovviamente entrambe le formule sono inevitabilmente approssimate, non essendo esatte le 2 costanti numeriche).

Esercizio$_\mu$ Risolvere la $t^3\,y' - 5 = 0$.

SVOLGIMENTO

È un'equazione differenziale e si risolve con questi passaggi:

$$t^3\,y' = 5$$

$$y'(t) = \frac{5}{t^3}$$

$$y(t) = \int 5\,t^{-3}\,dt = 5\int t^{-3}\,dt = 5\,\frac{t^{-3+1}}{-3+1} + c = -\frac{5}{2\,t^2} + c$$

Con WolframAlpha: `Solve[t^3y'=5]` dà $c_1 - \frac{5}{2\,t^2}$

BOZZA - DRAFT

Note sulle notazioni. Nell'ambito della teoria delle equazioni differenziali, è abbastanza comune usare il nome x per la funzione incognita, il che potrebbe generare fraintendimenti, per esempio

$$x'(t) = x(t) \qquad \text{ovvero } x' = x$$

Ed è abbastanza comune indicare la derivazione col punto soprascritto, per esempio

$$\dot{x}(t) = x(t) \qquad \text{ovvero } \dot{x} = x$$

e 2 punti soprascritti per la derivata seconda: $\ddot{x}$.
Anche il nome u è molto usato per la funzione incognita.
Classicissima in Fisica è l'equazione differenziale del pendolo

$$\ddot{u} = -u$$

e si capisce che è una soluzione è $\cos t$, e più in generale $\cos(t + c)$.

26.16 Complementi – Note finali sulle funzioni elementari

Le regole della Natura sono scritte in linguaggio matematico, ci insegna Galileo Galilei.

Particolarmente efficaci in questo senso sono le *funzioni elementari*: potenze, logaritmi, esponenziali, valore assoluto, funzioni trigonometriche... (Una completa elencazione sarebbe difficile).

È spettacolare quanti fenomeni si possono descrivere con formule fatte di funzioni elementari con le 4 operazioni più l'elevamento a potenza – in particolare la potenza 0.5 che dà la radice

BOZZA - DRAFT

quadrata.

Un modello matematico può approssimativamente essere definito come una relazione matematica – diciamo pure in generale una funzione o meglio un'equazione con più variabili – che cattura certi aspetti della realtà sensibile, quantificati da quelle variabili.
Per esempio

$$funzione(variabile_1, ..., variabile_n) = 0$$

come la $p\,V - n\,R\,T = 0$ della Termodinamica.
E, sorprendentemente spesso, quella funzione o equazione è fatta con funzioni elementari combinate con le 4 operazioni e l'elevamento a potenza. (Talvolta ci sono funzioni *non elementari*).

Entusiasmati dal successo, c'è il rischio di esagerare.
(E "trasformare tutto in un numero").

Osserviamo due limitazioni:
1) la relazione matematica è quasi sempre approssimata;
2) smette di valere al di fuori di certi range (domini) in generale non ben specificati, perdendo progressivamente bontà.

Esempio 0, di Microbiologia: l'accrescimento microbico.
Abbiamo già ben detto, che il numero di microbi in una coltura non cresce per sempre esponenzialmente, ma solo – e comunque approssimativamente – all'inizio. Similmente con qualunque altra popolazione; come pure non c'è epidemia che non finisca.

BOZZA - DRAFT

Esempio 1, di Fisica e Chimica: i vasi comunicanti.
Definito un certo sistema fisico, detto dei vasi comunicanti, com'è noto vale la relazione

$$h_1 = h_2$$

Fin dall'inizio c'è l'approssimazione della non perfetta planarità delle superfici liquide nelle immediate vicinanze dei bordi, per complessi fenomeni fisici. Ma poi, è ovvio che tale formula non avrà senso per altezze maggiori del diametro dell'universo. E anche su scale umane, la relazione non vale molto bene se uno dei due vasi è "molto" sottile, per il (complesso) fenomeno fisico della capillarità: via via che uno dei due vasi si assottigliasse, la formula perderebbe precisione. Eppure, la Legge dei Vasi Comunicanti rimane del massimo valore, teorico e applicativo, e il fenomeno è modellizzato proprio dalla semplice equazione sopra scritta. Con tutte le cautele del caso, quindi.

BOZZA - DRAFT

Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule *contemporaneamente* numerate *et* riquadrate, oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione, e le formule del paragrafo 26.2.

PARTE B – MATEMATICHE DELL'INCERTEZZA

BOZZA - DRAFT

Sezione B1 – Calcolo delle probabilità

BOZZA - DRAFT

VII – Probabilità assiomatica ed elementare

BOZZA - DRAFT

27 Introduzione al Calcolo delle Probabilità

Se il farmaco non funzionasse affatto, e contasse solo il caso,
quanto sarebbe probabile ottenere risultati buoni
almeno quanto quelli del nostro trial clinico?

Se è meno del 5%, tradizionalmente il risultato si considera *statisticamente significativo*: sarebbe una coincidenza troppo improbabile per attribuirla al solo caso.

A quella domanda risponderà la Statistica Inferenziale, che vedremo, e che si basa essenzialmente su:

- Statistica Descrittiva, che abbiamo visto;
- Calcolo Integrale, che abbiamo visto;
- Calcolo delle Probabilità, che andiamo a esaminare.

BOZZA - DRAFT

27.1 Inquadramento della questione [52]

Il calcolo delle probabilità è una branca della matematica.
Come tale tratta oggetti astratti, ma, a differenza di altre branche della matematica, gli enti che manipola sono in generale molto vicini o collegati alla realtà sensibile: in particolare troverete affermazioni su dadi e monete, che sono modelli "ideali" , "puliti", perfetti, per poi applicare le tecniche a fenomeni della realtà sensibile, in particolare sanitari e farmaceutici, inevitabilmente molto meno "ideali" e ben definiti: per esempio migliora/peggiora.

Il prodotto principale del Calcolo delle Probabilità è un numero che è *la probabilità di un evento*, come "la probabilità che la somma dei punti di 2 dadi sia 7 è $\frac{1}{6}$", che di per sè potrebbe voler dire poco ma può diventare preziosissimo per *scegliere* fra diverse alternative possibili, confrontandole numericamente; per esempio la probabilità che la somma (dei punti) di 2 dadi sia 8 è $\frac{5}{36}$ che è meno di $\frac{1}{6}$. Non solo

BOZZA - DRAFT

per una scommessa sui dadi fra amici, ma anche per delicate scelte mediche o economiche o personali.

Cosa daranno i dadi è incerto ma che convenga scommettere sul 7 piuttosto che sull'8 è certissimo.
Pensate allora al confronto fra 2 terapie farmacologiche.

Gli enti teorici di base sono gli eventi e la loro probabilità, definita in 4 modi:

- Concezione frequentista della probabilità
- Concezione classica della probabilità
- Concezione soggettiva della probabilità
- Concezione assiomatica della probabilità

BOZZA - DRAFT

27.2 La concezione frequentista della probabilità [56]

La concezione frequentista della probabilità è intuitiva e la vediamo con un esempio. Un farmaco è stato somministrato a 1000

persone con una certa diagnosi di malattia, e dopo 5 anni sono vive 700. Per l'uniformità delle condizioni e l'alto numero di *prove* si tende a ritenere che se quello stesso farmaco verrà somministrato ad altre 100 persone con quella stessa diagnosi di malattia, circa 70 saranno vive dopo 5 anni, ovvero, detto altrimenti, che somministrato a 1 persona c'è il 70% di *probabilità* che sia viva dopo 5 anni (ovviamente 70% cioè 0.7 è $\frac{700}{1000}$).

Se per quella stessa diagnosi di malattia un altro farmaco è stato somministrato a 2000 persone e dopo 5 anni sono vive 1200, si tenderà a ritenere che se quello stesso farmaco verrà somministrato ad altre 100 persone con quella stessa diagnosi di malattia, circa 60 saranno vive dopo 5 anni, ovvero, detto altrimenti, che somministrato a 1 persona c'è il 60% di *probabilità* che sia viva dopo 5 anni (ovviamente 60% cioè 0.6 è $\frac{1200}{2000}$), meno del primo farmaco.

Se per quella stessa diagnosi di malattia un altro farmaco è stato somministrato a 4 persone e dopo 5 anni sono vive 3, ne verrebbe una probabilità di sopravvivenza a 5 anni del 75%, cioè 3 su 4, cioè perfino

BOZZA - DRAFT

meglio del primo farmaco, che però è stato provato su 1000 persone, mentre questo solo su 4; e qui siamo giunti al limite della validità di questa concezione, se non vengono fatti ulteriori approfondimenti.
Le probabilità così ottenute si chiamano *probabilità a posteriori*.

In pratica, detto semplificatamente, se finora è andata in un certo modo, con una certa quota di "successi" (ma si faccia attenzione che il successo può essere non solo la guarigione ma anche la morte o quant'altro, dipende da come si definisce), riteniamo che potrà continuare ad andare nello stesso modo, "proporzionalmente", e ciò definisce la probabilità (in senso) frequentista.

BOZZA - DRAFT

27.3 La mortalità [59]

Semplificando, il numero, definito per uno stato o una regione geografica, relativamente a 1 anno,

$$m := \frac{\#\, morti}{\#\, abitanti}$$

si chiama mortalità. (E certo, qua semplificatamente consideriamo costante il numero di abitanti nell'anno).
Ultrasemplificatamente, nel terzo millennio è intorno all'1% in molti Stati. Ovvero intorno al 10 per mille.

Riferito al passato, può essere visto nel contesto della Statistica Descrittiva.
Ma in situazioni relativamente stabili – senza guerre o epidemie oltremodo devastanti – può essere visto nell'ottica delle probabilità soggettiva e frequentista:

$$P(\text{un soggetto preso a caso muore entro 1 anno}) = m$$

BOZZA - DRAFT

(E certo un pessimista, nella sua valutazione soggettiva di probabilità, potrà dare valori anche maggiori).

Naturalmente si possono considerare anche mortalità riferite a una singola causa di morte. Per esempio col covid-19 nei 32 mesi e mezzo dall'inizio (fine febbraio 2020) fino a oggi, metà novembre 2022, 3 per mille: circa 180mila morti su circa 60 milioni di abitanti; nel 2020, l'anno peggiore, quello dell'inizio del covid in Italia, 1.3 per mille, e poi meno.

E naturalmente si possono considerare mortalità riferite a fasce d'età e genere. Negli USA molte statistiche sanitarie sono fatte anche per gruppo razziale.

BOZZA - DRAFT

In https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_countries_by_mortality_rate si trova (15 novembre 2022) una lista dei tassi di mortalità per mille dei vari stati nella stima della CIA relativa al 2020. Ecco 3

stati/regioni, che sorprenderanno il lettore poco addentro alla Demografia, che sostanzialmente può essere considerata una branca della Statistica Descrittiva:

Italia 10.70

India 7.30

Uganda 5.30.

Si noti che, alquanto controintuitivamente, un italiano preso a caso aveva nel 2020 probabilità di morire entro un anno doppia di un ugandese preso a caso. Diventa meno sorprendente leggendo in https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_countries_by_median_age la stima della stessa CIA per lo stesso anno 2020 delle età mediane, 46.5 anni in Italia e 15.7 in Uganda. (Eppure in Niger l'età mediana è simile all'Uganda, anzi perfino minore, 14.8, e la mortalità è simile all'Italia, 10.20).

Umanità tutta: età mediana 31.0 anni, mortalità 7.70, circa 0.8%.

BOZZA - DRAFT

27.4 La concezione classica della probabilità [03]

La concezione classica della probabilità si basa su

un concetto primitivo che bisogna supporre noto: l'*equiprobabilità*; e

questa definizione, valida solo per i casi equiprobabili:

$$\boxed{\text{probabilità} := \frac{\text{numero dei casi favorevoli}}{\text{numero dei casi possibili equiprobabili}}} \tag{10}$$

Per esempio i 6 risultati del dado (regolare, non truccato) li riteniamo equiprobabili e allora la probabilità del risultato pari è

$$P(pari) = \frac{\#\{2,4,6\}}{\#\{1,2,3,4,5,6\}} = \frac{3}{6} =$$

$$= \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

Come ulteriore esempio, la probabilità che la somma dei punti di 2 dadi sia maggiore di 10 è $\frac{3}{36}$ cioè $\frac{1}{12}$ perché dei 36 casi possibili equiprobabili $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$,..., $(6,6)$ sono 3 quelli

BOZZA - DRAFT

favorevoli all'evento considerato (somma maggiore di 10) e cioè $(5,6)$, $(6,5)$, $(6,6)$.

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

$* \approx \%$ Che probabilità c'è di ottenere un numero primo come somma dei risultati di 2 dadi regolari?

SVOLGIMENTO

Dei 36 casi equiprobabili, qua indicati con ovvio significato dei simboli,

```
1+1 1+2 1+3 1+4 1+5 1+6
2+1 2+2 2+3 2+4 2+5 2+6
3+1 3+2 3+3 3+4 3+5 3+6
4+1 4+2 4+3 4+4 4+5 4+6
5+1 5+2 5+3 5+4 5+5 5+6
6+1 6+2 6+3 6+4 6+5 6+6
```

con somme rispettive

```
02 03 04 05 06 07
03 04 05 06 07 08
04 05 06 07 08 09
05 06 07 08 09 10
06 07 08 09 10 11
07 08 09 10 11 12
```

(alcuni zeri sono scritti solo per buon allineamento) sono primi (P: 2, 3, 5, 7, 11) e non primi (n: 4, 6, 8, 9, 10, 12) rispettivamente

BOZZA - DRAFT

```
P P n P n P
P n P n P n
n P n P n n
P n P n n n
n P n n n P
P n n n P n
```

avendosi così 15 casi favorevoli su 36 casi equiprobabili e allora

$$p = \frac{\#\, casi\ favorevoli}{\#\, casi\ possibili\ equiprobabili} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

e in definitiva

$$\boxed{\tfrac{5}{12} \approx 0.417 = 41.7\%}$$

oppure, con un decimale in più,

$$\boxed{\tfrac{5}{12} \approx 0.4167 = 41.67\%}$$

(e se ne potrebbero mettere anche di più, se fosse utile o desiderato).

BOZZA - DRAFT

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

$* \approx \%$ Che probabilità c'è di ottenere un numero primo come somma dei risultati di 2 dadi regolari a 8 facce numerate da 1 a 8? (Hanno la forma di ottaedro regolare).

SVOLGIMENTO

Dei 64 casi equiprobabili, qua indicati con ovvio significato dei simboli,

1+1 1+2 1+3 1+4 1+5 1+6 1+7 1+8
2+1 2+2 2+3 2+4 2+5 2+6 2+7 2+8
3+1 3+2 3+3 3+4 3+5 3+6 3+7 3+8
4+1 4+2 4+3 4+4 4+5 4+6 4+7 4+8
5+1 5+2 5+3 5+4 5+5 5+6 5+7 5+8
6+1 6+2 6+3 6+4 6+5 6+6 6+7 6+8
7+1 7+2 7+3 7+4 7+5 7+6 7+7 7+8
8+1 8+2 8+3 8+4 8+5 8+6 8+7 8+8

con somme rispettive

02 03 04 05 06 07 08 09
03 04 05 06 07 08 09 10
04 05 06 07 08 09 10 11
05 06 07 08 09 10 11 12
06 07 08 09 10 11 12 13
07 08 09 10 11 12 13 14
08 09 10 11 12 13 14 15

BOZZA - DRAFT

09 10 11 12 13 14 15 16

(alcuni zeri sono scritti solo per buon allineamento) sono primi (P: 2, 3, 5, 7, 11, 13) e non primi (n: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16) rispettivamente

P P n P n P n n
P n P n P n n n
n P n P n n n P
P n P n n n P n
n P n n n P n P
P n n n P n P n
n n n P n P n n
n n P n P n n n

avendosi così 23 casi favorevoli su 64 casi equiprobabili e allora

$$p = \frac{\#\, casi\ favorevoli}{\#\, casi\ possibili\ equiprobabili} =$$

$$\boxed{\frac{23}{64} \approx 0.359 = 35.9\%}$$

oppure, con un decimale in più,

$$\boxed{\frac{23}{64} \approx 0.3594 = 35.94\%}$$

BOZZA - DRAFT

(e se ne potrebbero mettere anche di più, se fosse utile o desiderato).

27.5 Concezione soggettiva della probabilità [07]

La definizione soggettiva della probabilità (di Leonard Jimmie Savage e Bruno[4] de Finetti) la diamo implicitamente attraverso questo esempio. Supponiamo che io possa scommettere sulla vittoria della squadra dei Vispi Volpini della prima partita del campionato e abbia queste idee:

Metto 100 euro e se vince prendo 300 euro: accetto felicissimo
Metto 100 euro e se vince prendo 200 euro: accetto contento
Metto 100 euro e se vince prendo 126 euro: per un pelo accetto
Metto 100 euro e se vince prendo 125 euro: sono indifferente
Metto 100 euro e se vince prendo 124 euro: per un pelo ma rifiuto
Metto 100 euro e se vince prendo 110 euro: rifiuto

BOZZA - DRAFT

[4] Attuario presso le Assicurazioni Generali, lungamente docente all'Università di Trieste, fu anche uno degli ideatori del codice fiscale.

Metto 100 euro e se vince prendo 100 euro: ci mancherebbe!

Questo significa che io ritengo che la probabilità di vittoria della squadra è $\frac{4}{5} = 0.8 = 80\%$. In pratica nell'ipotesi intermedia in cui non ho nè interesse a scommettere nè a non scommettere ritengo che se l'evento si verificasse 5 volte, 4 volte la squadra vincerebbe e io avrei preso $4 \cdot 125$ euro cioè 500 euro, esattamente quanto avrei speso nelle 5 scommesse. È ovvio che a 126 euro considero vantaggiosa la scommessa (seppure di poco).

Il pareggiarsi della spesa con l'ipotetica vincita definisce la *probabilità soggettiva* che io attribuisco al verificarsi dell'evento considerato. La formula è

$$p = \frac{costo\,della\,scommessa}{vincita\,nel\,caso\,indifferente}\,.$$

Nell'esempio $\frac{100}{125}$.

BOZZA - DRAFT

Con questa definizione, un esperto attuario può fissare il premio assicurativo per un evento per il quale non sia disponibile una casistica significativa, come l'immissione sul mercato di un farmaco da parte di una nuova azienda, o un viaggio su Marte; o esiste una casistica assolutamente non omogenea.

Il ricorso alla probabilità soggettiva è frequentissimo in Farmacia e Medicina.

Esempio 1.

Leggiamo[5] per esempio sul sito dell'ECDC, European Centre for Disease Prevention and Control:

On the basis of the information currently available, ECDC considers that:

- the likelihood of infection for EU/EEA citizens residing in or visiting Hubei province is estimated to be high;
- the likelihood of infection for EU/EEA citizens in other Chinese provinces is moderate and will increase;

[5] Letto il 4 febbraio 2020 in https://www.ecdc.europa.eu/sites/default/files/documents/novel-coronavirus-risk-assessment-china-31-january-2020_0.pdf

BOZZA - DRAFT

- there is a moderate-to-high likelihood of additional imported cases in the EU/EEA;
- the likelihood of observing further limited human-to-human transmission within the EU/EEA is estimated as very low to low if cases are detected early and appropriate infection prevention and control (IPC) practices are implemented, particularly in healthcare settings in EU/EEA countries;

Il soprastante testo non si spinge fino a dare stime numeriche dei valori di probabilità, ma molto chiaramente parla in termini di probabilità (o verosimiglianza: *likelihood*) "alta", "moderata", "da-moderata-ad-alta", "da molto bassa a bassa".

Le valutazioni di probabilità soggettiva prodotte da enti considerati autorevoli possono orientare significativamente i comportamenti, dei singoli e delle comunità, sia direttamente sia influenzando (e di fatto fungendo da base teorica) l'emanazione di regolamenti o leggi, a vari livelli di autorità.

BOZZA - DRAFT

Anche le norme antisismiche italiane a cui devono sottostare i nuovi edifici (coi relativi costi associati), comprese le farmacie e soprattutto gli ospedali, sono basate su valutazioni di probabilità soggettiva, che classificano il rischio sismico nelle varie zone. In particolare la "zona 1" è quella in cui *si ritiene* che probabilità che capiti un forte terremoto sia *alta* (in un prossimo futuro; idealmente, in via semplificata, si pensi a 50 anni). E poi vi sono le zone 2, 3, e 4. Con ovvie differenze nei costi di costruzione.

Mappe che le leggi possono cambiare nel tempo, in base a valutazioni soggettive mutevoli sia per nuovi dati (fra cui i terremoti) che cambiamenti delle composizioni delle commissioni scientifiche che di pensieri di singoli esperti nel corso del tempo, si veda per esempio l'articolo scientifico *Italy's new seismic hazard map is back to square one* (2023)

Naturalmente nel corso della storia un'infinità di volte gli *esperti* hanno sbagliato le stime, anche in un modo clamoroso; si veda per esempio lo spassoso libro *La parola all'esperto*. Tuttavia questo fenomeno si riduce se si distinguono i *sedicenti* esperti dagli esperti deputati da

BOZZA - DRAFT

organismi già di per loro, in qualche modo, di alto livello. (Eppure anche qua, c'è stato talvolta *da mettersi le mani nei capelli*.)

Se invece scendiamo al livello dei profani relativamente ad un certo argomento specialistico, in generale le loro stime di frequenza o probabilità (il che è relativamente equivalente) in generale valgono, per così dire, *un po' meno di nulla*, con usuali sovrastime di parecchi ordini di grandezza – anche per la potenza della manipolazione mediatica – delle frequenze (e quindi delle associate probabilità) di fenomeni anche ampiamente considerati e discussi pubblicamente.

Le valutazioni di probabilità soggettiva ovviamente sono alla base della vita di tutte le persone, ma ad un livello basico, senza applicazione di formule, per esempio quando si ritiene più probabile una cosa di un'altra.

Ad un livello matematico più fine, le valutazioni di probabilità sog-

BOZZA - DRAFT

gettiva governano molte scelte di tipo medico e sanitario.

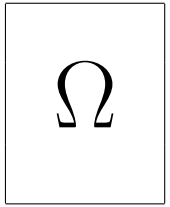
Ad un livello matematico ancora superiore, esse sono alla base di buona parte dell'economia mondiale, governando la finanza speculativa, le assicurazioni, i bonds...
Con specifico riferimento alla Medicina e alla Farmacia, si considerino in particolare gli *ebola bonds*, che traggono il nome dal morbo ebola ma possono applicarsi ad altri, che sono vere e proprie scommesse sulle epidemie. Queste scommesse in teoria sono formulate *positivamente*, perché gli investitori nazionali guadagnano se l'epidemia *non* si verifica – e i danni li pagano organismi sovranazionali come la Banca Mondiale.
Ma distorsioni sono possibili, come vediamo in questo passaggio:

> *"to do so Ebola must kill at least 20 people in at least one other country. So far, neighbouring Uganda has only had two victims. (...) Congolese health authorities have*

BOZZA - DRAFT

an incentive to let the virus move into Uganda in order to unlock more aid."[6]

27.6 Concezione assiomatica della probabilità [11]



Lettera greca *omega* maiuscola, presente sulle banconote degli euro.

Le basi, gli assiomi

La concezione assiomatica della probabilità è astratta. Con definizioni e assiomi si crea la probabilità, interpretabile in modo compatibile con le altre 3 concezioni della probabilità viste:

BOZZA - DRAFT

[6] Reuters in https://www.reuters.com/article/us-worldbank-ebola-breakingviews/breakingviews-ebola-bonds-are-wonky-way-to-tackle-pandemics-idUSKCN1V30SW, consultato il 5 marzo 2020.

• Ω: *evento certo*.
(Esempi: "il dado fa 1 o 2 o 3 o 4 o 5 o 6"; "sopravvive 5 anni o no").

• $\mathbb{A}$: *σ-algebra degli eventi*: tutti gli eventi *ragionevolmente* considerabili.
Tecnicamente: un sottoinsieme delle parti di Ω (cioè di $I\!P(\Omega)$) sufficientemente regolare, precisamente tale che:
  ◇ $\emptyset$, $\Omega \in \mathbb{A}$
  ◇ $(\forall A \in \mathbb{A})\ A^C \in \mathbb{A}$ (dove A^C è il complementare di A)
  ◇ $(\forall A_1, ..., A_n, ... \in \mathbb{A})\ \cup_{n=1}^{\infty} A_n, \cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{A}$.

• La *[funzione] probabilità* $P : \mathbb{A} \to [0, 1]$ tale che
  ◇ $P(\Omega) = 1$ (l'evento certo ha probabilità 100%)
  ◇ $P(A_1 \cup^* A_2 \cup^* ... \cup^* A_n \cup^* ...) = P(A_1) + ... + P(A_n) + ...$
dove $\cup^*$ indica l'unione disgiunta cioè con intersezione vuota.

• Lo *spazio di probabilità*: la terna ordinata $(\Omega, \mathbb{A}, P)$.

BOZZA - DRAFT

- Si definisce la *probabilità condizionata*

$$P(B|A) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{11}$$

per la quale è apparsa conveniente l'interpretazione di probabilità che si verifichi B *sapendo* che si è verificato A. Per esempio con riferimeno a un dado (regolare)

$$P(\text{“}dispari\text{”}|\text{“}primo\text{”}) = \frac{P(\text{“}dispari\text{”} \wedge \text{“}primo\text{”})}{P(\text{“}primo\text{”})} =$$

$$= \frac{P(\{2,3,5\} \cap \{1,3,5\})}{P(\{2,3,5\})} =$$

$$= \frac{P(\{3,5\})}{P(\{2,3,5\})} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

- *L'evento impossibile*, che ha probabilità 0.

BOZZA - DRAFT

27.7 L'evento impossibile fa inghippi che fuggiremo [15]

L'impossibilità logica è diversa dall'impossibilità probabilistica. Certi eventi di probabilità 0 *potrebbero* succedere dal punto di vista logico.

Leggiamo nel libro (Zanichelli, 2022) di Andrea Sgarro et al. Statistica di base:

> Purtroppo se si ammettono le probabilità *estreme* zero e uno (...) il discorso diventa sottile

Non ci addentreremo nella questione. Lo scrivente garantisce personalmente al Lettore che un *prefissato* evento di probabilità 0 non capiterà comunque *mai*. Non[(7)] se ne preoccupi.

BOZZA - DRAFT

[7] Produciamo qua 2 esempi originali.
Se Pierino Pazientino inizia a sommare a 2 a 2 i cubi degli interi positivi, in un qualunque ordine che a lui piace
$1^3 + 1^3$
$1^3 + 2^3$
...
la probabilità che ottenga un numero cubo (come 27, o 1000) entro un anno, a qualunque velocità svolga i calcoli, è 0. Questa è un'impossibilità probabilistica e contemporaneamente logica, perché è stato dimostrato

27.8 Mortalità e letalità di una malattia o infezione [18]

Il concetto di probabilità condizionata è sottostante alla distinzione fra *mortalità* e *letalità* di una malattia, qua definibili ultrasemplificatamente così:

$$\text{mortalità} := \frac{morti}{abitanti} = P(morte)$$

$$\text{letalità} := \frac{morti}{malati} = P(morte \,|\, malato)$$

naturalmente in un senso frequentista (cioè in pratica contando i morti), e ovviamente (sia per la mortalità che per la letalità) bisognerà specificare un intervallo di tempo, per esempio dall'inizio alla "fine" di

BOZZA - DRAFT

che la somma di 2 cubi interi positivi non può essere un cubo.

Invece che 2 persone che non si vedono scelgano lo stesso punto di un circolo disposto orizzontalmente e rotante – se mai fosse realizzabile tale in effetti non concretamente realizzabile esperimento – è evento possibile dal punto di vista logico ma con probabilità 0, cioè impossibile dal punto di vista probabilistico.

un'epidemia.
Per esempio leggiamo[8] sulla peste del Trecento:

> Una volta giunta in Europa, la peste nera si diffuse rapidamente perdurando tra i sei e i nove mesi nelle aree colpite. Il tasso di mortalità medio fu di circa il 30% nel totale della popolazione, mentre il tasso di letalità fu circa il 60%.

Si noti che per il covid-19 è invalso di fatto lo standard di contare in *casi*, cioè gli infetti riconosciuti, e non quelli che in senso stretto sarebbero i *malati*, cioè malati in senso clinico, cioè con sintomi: sono conteggiati i sintomatici e gli asintomatici, il che li aumenta molto di numero, però semprechè riconosciuti, il che li diminuisce di numero. Una lunga dettagliata dissertazione sulla questione si trova nella pagina web OMS in https://www.who.int/news-room/commentaries/detail/estimating-mortality-from-covid-19, che infine conclude che... non è possibile stabilire quale sia la letalità del covid-19,

BOZZA - DRAFT

[8] Da Wikipedia, l'enciclopedia libera, alla voce *Peste nera*.

più specificamente il *case fatality ratio* (CFR), per varie ragioni che elenca. Per farsi un'idea della distinzione fra IFR, *infection fatality rate*, e CFR, *case fatality rate*, si veda il testo – comunque discutibile – in https://en.wikipedia.org/wiki/Case_fatality_rate. La questione, sia teorica ovvero definizionale, che pratica ovvero numerica, è complessa, e, nel caso del covid, è stata sicuramente influenzata da ciclopici interessi economici, e altri indicibili.

Di fatto indurre nell'umanità la convinzione probabilistica che se ci si contagia molto probabilmente si muore, ha fatto accettare nel 2020 un rapidissimo mutamento nell'umanità, che ha fatto diventare i superricchi del pianeta ancora più spropositatamente ricchi – a danno[9] di una parte considerevole degli altri 8 miliardi di esseri umani.

BOZZA - DRAFT

[9] È questione complessa ma per farsi un'idea si legga: "I miliardari a Davos potranno brindare all'incredibile impulso che le loro fortune hanno ricevuto grazie alla pandemia e all'aumento dei prezzi dei generi alimentari e dell'energia, – ha detto Gabriela Bucher, direttrice esecutiva di Oxfam International – ma allo stesso tempo decenni di progressi nella lotta alla povertà estrema rischiano di essere vanificati con milioni di persone lasciati senza mezzi per poter semplicemente sopravvivere" in https://www.oxfamitalia.org/davos-2022-crescono-le-disuguaglianze/.

Il grandissimo epidemiologo Ioannidis in un articolo[10] del maggio 2021 stimava in circa lo 0.15% l'IFR del covid-19 al febbraio 2021, "with substantial differences in IFR and in infection spread across continents, countries and locations.".
A metà novembre 2022, in Italia abbiamo quasi 180mila morti e quasi 24 milioni di casi diagnosticati, e il rapporto è 0.75%, 1 "morto covid" ogni 132 casi covid diagnosticati.

27.9 La letalità apre una finestra su un baratro teorico [22]

La posizione epistemologica della probabilità è complessa, e vi si trovano molti paradossi (seppure spesso solo apparenti, e cioè in effetti spiegabilissimi).

BOZZA - DRAFT

[10] Ioannidis JPA. Reconciling estimates of global spread and infection fatality rates of COVID-19: An overview of systematic evaluations. Eur J Clin Invest. 2021 May;51(5):e13554. doi: 10.1111/eci.13554. Epub 2021 Apr 9. PMID: 33768536; PMCID: PMC8250317.

Prendiamo non solo per buono ma anche valevole ancora adesso il valore – illustrato in 27.8 – di 0.75% della probabilità che ha avuto di morire ("morte covid", comunque sia stata determinata, non apriamo qua un secondo baratro) un qualunque infettato italiano diagnosticato nel periodo dal 2020 al novembre 2022, preso oggi a caso (in effetti attualmente la probabilità di morire se diagnosticati contagiati è molto minore che all'inizio della pandemia, ma ora non consideriamo questo fatto).

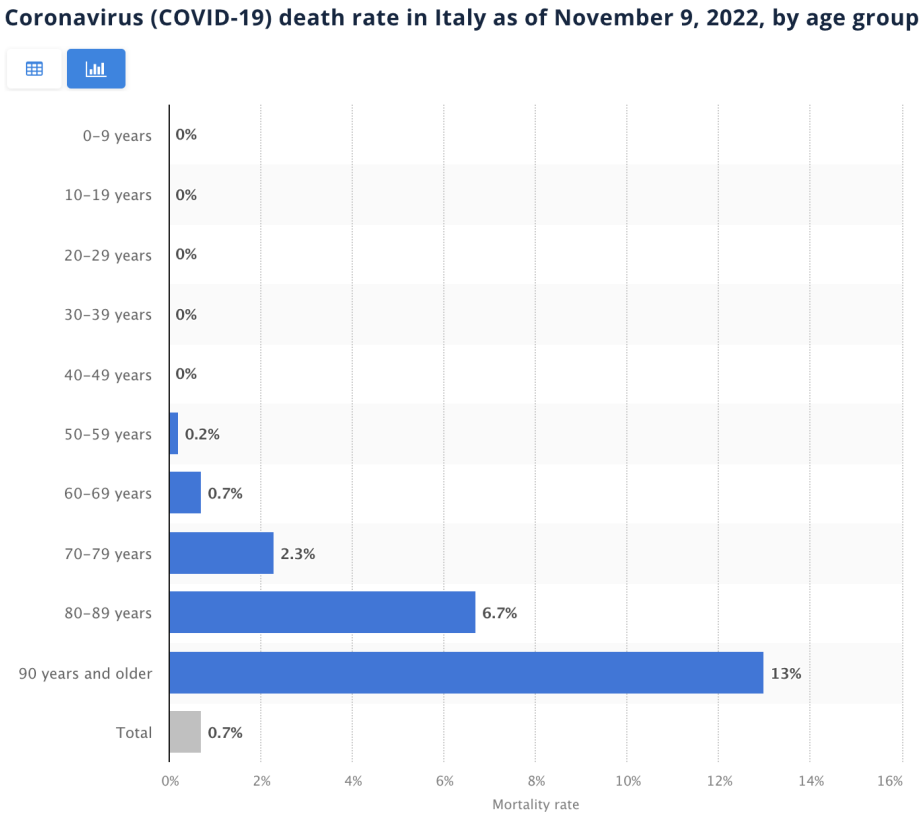
Se dunque un italiano oggi si ritrova diagnosticato contagiato, ha lo 0.75% di probabilità di morire "di" questa infezione?

Sì e no. Se del soggetto sappiamo solo che è italiano e che è diagnosticato contagiato, allora sì, in base a quanto sopra detto si deve concludere che ha lo 0.75% di probabilità di morirne. Ma se sappiamo che ha meno di 30 anni, dobbiamo concludere che la probabilità di morte è circa 0% (vedi figura), e se sappiamo che ha più di 90 anni la probabilità risulta circa del 13%. D'altra parte, valori ancora diversi si otterrebbero considerando il genere, la presenza di un tumore attivo,

BOZZA - DRAFT

eccetera. La probabilità dipende in modo sostanziale dall'*informazione*, non è un numero che viaggia appiccicato al soggetto, oppure, se lo è, se vogliamo dire diversamente, è tanto inconoscibile quanto tutte le condizioni che potrebbero influenzarlo. Nel prossimo paragrafo ritorneremo sulla questione con un notevole paradosso.

BOZZA - DRAFT



DRAFT

Figura 3: Letalità del covid-19 nelle classi d'età in Italia. Screenshot da https://www.statista.com/statistics/1106372/coronavirus-death-rate-by-age-group-italy/

27.10 Mettiamo in dubbio l'esistenza della probabilità [26]

Esempio che fa dubitare dell'esistenza della probabilità.
Alessio e Berto sono due italiani, gemelli identici maschi. Alessio legge che l'1% degli italiani hanno un certo gene. Essendo italia- no ritiene di avere l'1% di probabilità di avere quel certo gene. (Il che è sostanzialmente corretto in base alle informazioni che ha). Berto legge che il 10% dei maschi europei hanno quello stesso gene. Essendo un maschio europeo ritiene di avere il 10% di probabilità di avere quel certo gene. (Il che è sostanzialmente corretto in base alle informazioni che ha). La cosa sorprendente è che essendo gemelli identici, entrambi hanno il gene, oppure non ce l'hanno.
Chissà qual è la probabilità che entrambi abbiano quel gene...



Si noti che a seconda che si consideri il soggetto come italiano, o maschio europeo, si hanno valori diversi per la – sfuggente – *probabilità*

BOZZA - DRAFT

di avere quel gene.

La valutazione (numerica) della probabilità dipende da ciò che si sa del soggetto, non è qualcosa di associato ine- sorabilmente al soggetto stesso – quel qualcosa non esiste.

Quel qualcosa non esiste!

BOZZA - DRAFT

27.11 Indipendenza degli eventi [30]

Nel caso che sapere che si è verificato A non muti per noi la probabilità che si verifichi B, cioè $P(B|A) = P(B)$, si ottiene, da quest'equazione e dalla (11),

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \qquad \text{eventi indipendenti}$$

e quest'equazione definisce assiomaticamente il caso di 2 *eventi indipendenti*. E si estende a 3 o più eventi, ma la questione è delicata.[11] Questa degli eventi indipendenti è in qualche modo la formula più importante del Calcolo delle Probabilità fra le non ovvie.

Per esempio

$$P(\text{“la moneta dà testa"} \wedge \text{“il dado dà 4"}) =$$

$$= P(\text{“la moneta dà testa"}) \cdot P(\text{“il dado dà 4"}) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} .$$

Invece “dispari" e “primo" non sono indipendenti nel lancio di un dado: $P(dispari) = P(1,3,5) = \frac{1}{2}$ e $P(primo) = P(2,3,5) = \frac{1}{2}$ ma $P(dispari \wedge primo) = P(3,5) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ che non è $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$.

BOZZA - DRAFT

[11] 3 eventi possono essere a 2 a 2 indipendenti senza che siano tutti indipendenti fra loro.

27.12 Alcuni teoremi ovvi sulla probabilità [34]

- Si dimostra (sono teoremi) che, per A e B eventi, valgono:
  - $P(A^C) = 1 - P(A)$ da cui in particolare $P(\emptyset) = 0$
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  - $P(A \cup^* B) = P(A) + P(B)$ (unione disgiunta)
  - $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^C)$
  - $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Per le soprastanti 5 formule i disegni insiemistici chiariscono tutto.
Poi, ce ne sono[(12)] di meno ovvie.

27.13 Formula di Bayes [37]

Si dimostra (teorema) la Formula di Bayes: dati un $B \in \mathbb{A}$ e una partizione di Ω, cioè degli insiemi $A_1, \ldots A_n$ disgiunti con unione Ω,

[12] Per esempio questa:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = 1 - P(A_1^C \cap A_2^C \cap \ldots)$$

BOZZA - DRAFT

vale

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)}$$
$$i = 1, ..., n.$$

27.14 Legge delle Alternative [41]

Anche la sola uguaglianza dei denominatori della formula precedente è interessante:

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B|A_k)$$

e in particolare con $n = 2$, scrivendo A invece di A_1 ed essendo necessariamente $A_2 = A^C$ (avendosi una partizione) si ha la

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(A^C)P(B|A^C) \qquad (12)$$

Si faccia un disegno rappresentativo della situazione.

BOZZA - DRAFT

Esempio sulla Legge delle Alternative.

$$P(morte) =$$

$$= P(vaccinato)P(morte|vaccinato) +$$

$$+P(non\ vaccinato)P(morte|non\ vaccinato)$$

ovviamente con riferimento a una popolazione (statistica) e un intervallo di tempo.

BOZZA - DRAFT

27.15 Alcune note finali [45]

Per esempio uno spazio di probabilità si ottiene con un dado regolare, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, dove $\{1\}$,...,$\{6\}$ sono gli *eventi semplici*, possiamo fissare molto opportunamente $\mathbb{A} := \mathbb{P}(\Omega)$, e la funzione P vale costantemente $\frac{1}{6}$. Per esempio $A := \{1, 3, 5\}$ è l'evento "esce 1 o 3 o 5", ovvero "[esce] [un numero] dispari".
Si calcolino A^C, $P(A^C)$, $\{1, 2, 6\}^C =: B$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(B)$.
Poi con lo stesso Ω si trovino altri 2 spazi di probabilità.

Esistono anche spazi di probabilità infiniti, per i quali nessuna uniformità è possibile, e in cui nella realtà sensibile possiamo aspettarci che in generale tenderà a ricorrere una *distribuzione* in qualche modo *a campana* – eventualmente troncata da una parte.

Si noti l'immediata (duplice) conseguenza della (11)

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B).$$



Nota. Di questa Lezione ci si dovrebbe aspettare che lo studente conosca a memoria le formule dei paragrafi

La concezione classica della probabilità (1 formula)
Concezione assiomatica della probabilità (molte formule)
Mortalità e letalità di una malattia o infezione (2 formule)
Indipendenza degli eventi (1 formula)

BOZZA - DRAFT

Alcuni teoremi ovvi sulla probabilità
oltre a tutto l'inquadramento teorico della questione.

BOZZA - DRAFT

27.16 ESERCIZI SULLA LEZIONE 27

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

$*$ $^{\%}$ Supponiamo che in una certa popolazione la mutazione RX1vis si presenti con probabilità 25% e, indipendentemente, la mutazione RS2vol con probabilità 40%. Che probabilità c'è che un soggetto di quella popolazione abbia la RX1vis e non abbia la RS2vol?

SVOLGIMENTO

$$P((\text{RX1vis})\, et\, (non\, \text{RS2vol})) =$$

l'avere o non avere la RS2vol è indipendente dall'avere o non avere la RX1vis

$$= P(\text{RX1vis}) \cdot P(non\, \text{RS2vol}) =$$

con l'evento complementare

$$= P(\text{RX1vis}) \cdot (1 - P(\text{RS2vol})) =$$

coi dati numerici

$$= 0.25 \cdot (1 - 0.4) =$$

in definitiva

BOZZA - DRAFT

$$\boxed{0.15 = 15\%}$$

Fissiamo l'attenzione per esempio sullo *spazio di probabilità uniforme* $(\Omega, \mathbb{A}, P)$ del lancio di 1 dado, con 6 *eventi semplici* di probabilità $\frac{1}{6}$, e $64 = 2^6$ eventi nella σ-algebra $\mathbb{A}$ delle parti di Ω:

$$\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad P(k) = 1/6,\ k = 1, ..., 6$$

$$\mathbb{A} := \mathbb{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, ...\{6\}, \{1, 2\}, ..., \{1, 2, 3, 4, 5\}, \Omega\}.$$

Per esempio $\{1, 2\}$ è l'evento "esce 1" vel "esce 2"; $P(1, 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
Naturalmente esistono spazi di probabilità finiti non uniformi, per esempio ottenuti con dadi truccati.

Oppure con riferimento a una diagnosi e/o trattamento farmacologico, e un fissato intervallo temporale (per esempio 5 anni), e comunque in un'ottica frequentista, con *scores* da 1=morte a 6=ottimamente, potremmo avere per esempio:

$3\% = P(morte)$ ...
$5\% = P(molto\, male)$ .....
$12\% = P(male)$ .....
$20\% = P(stabile)$ .....
$40\% = P(bene)$ .....
$20\% = P(ottimamente)$ .....

BOZZA - DRAFT

(Si noti la forma più o meno a campana).

Calcoliamo per esempio

$$P(\text{“}migliora\text{”}) = P(\text{“}bene\text{”} \vee \text{“}ottimamente\text{”}) =$$

eventi disgiunti, somma delle probabilità:

$$= P(\text{“}bene\text{”}) + P(\text{“}ottimamente\text{”}) =$$

$$= 40\% + 20\% = 60\%.$$

Per 2 soggetti

$$P(\text{“}entrambi\ morti\text{”}) =$$

$$= P(\text{“}morte\ del\ 1^{\wedge}\ soggetto\text{”} \wedge \text{“}morte\ del\ 2^{\wedge}\ soggetto\text{”}) =$$

e nell'ipotesi di indipendenza

$$= P(\text{“}morte\ del\ 1^{\wedge}\ soggetto\text{”}) \cdot P(\text{“}morte\ del\ 2^{\wedge}\ soggetto\text{”}) =$$

$$= 0.03 \cdot 0.03 = 0.0009 = 0.09\%$$

(Poco meno dell'1 per mille). Ma se i soggetti sono legati affettivamente, l'ipotesi di indipendenza diventa alquanto inverosimile. (La morte dell'uno in generale aumenta la probabilità di morte dell'altro a prescindere dalla terapia seguita).

BOZZA - DRAFT

Si noti che appena si esce dalla modellizzazione "perfetta" dei dadi e delle monete, si introducono inevitabilmente problematiche che poi di fatto si trasformeranno in incertezze nei risultati statistici. (Dove l'indipendenza, e la normalità gaussiana dei dati – che vedremo – sono spesso ipotesi implicite, di fatto imperfette).
Nota. Il seguente esercizio richiede una calcolatrice con 8 cifre, o una moltiplicazione con carta e penna.

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

$* \approx \%$ Ogni volta che una fissata persona fa una certa cosa, per esempio va in una zona infestata da insetti pericolosi, si espone ad un certo rischio sanitario, per esempio di subire una puntura d'insetto pericoloso, con probabilità 7%. Fissato questo esempio (ma ugualmente si potrebbe ragionare in un caso generale) che probabilità c'è che andando 4 volte nella zona infestata – supponendo indipendenti gli eventi – quella persona venga punta da qualche insetto pericoloso?

SVOLGIMENTO

$$P(punto\,al\,1^{\wedge}\,viaggio) = ... = P(punto\,al\,4^{\wedge}\,viaggio) = 7\% = \frac{7}{100}$$

Evento complementare:

$$P(non\,punto\,al\,1^{\wedge}\,viaggio) = ... = P(non\,punto\,al\,4^{\wedge}\,viaggio) = 93\% = \frac{93}{100}$$

BOZZA - DRAFT

Evento composto:

$$P(mai\ punto\ nei\ 4\ viaggi) = \frac{93}{100} \cdot \frac{93}{100} \cdot \frac{93}{100} \cdot \frac{93}{100} = \left(\frac{93}{100}\right)^4$$

Evento complementare:

$$P(punto\ almeno\ 1\ volta\ nei\ 4\ viaggi) = 1 - \left(\frac{93}{100}\right)^4 =$$

$$= 1 - \frac{93^4}{100^4} = 1 - \frac{74\,805\,201}{100\,000\,000} = \frac{100\,000\,000 - 74\,805\,201}{100\,000\,000} =$$

$$\boxed{\frac{25194799}{100\,000\,000} \approx 0.252 = 25.2\%}$$

BOZZA - DRAFT

ESERCIZIO$_{\mu 2018}$

$*$ Ogni volta che una fissata persona fa una certa cosa, per esempio va in metropolitana, si espone ad un certo rischio sanitario, per esempio di entrare in contatto coi pidocchi, con probabilità p. Fissato questo esempio (ma ugualmente si potrebbe ragionare in un caso generale) che probablità c'è che in 10 viaggi in metropolitana – supponendo indipendenti gli eventi – quella persona sia entrata in contatto coi pidocchi?

SVOLGIMENTO

$$P(contatto\,nel\,1^{\wedge}\,viaggio) = ... = P(contatto\,nel\,10^{\wedge}\,viaggio) = p$$

Evento complementare:

$$P(non\,contatto\,nel\,1^{\wedge}\,viaggio) = ... = P(non\,contatto\,nel\,10^{\wedge}\,viaggio) = 1-p$$

Evento composto:

$$P(nessun\,contatto) = (1-p)\cdot ... \cdot (1-p) = (1-p)^{10}$$

Evento complementare:

$$\boxed{P(almeno\,un\,contatto) = 1-(1-p)^{10}}$$

BOZZA - DRAFT

ESERCIZIO$_{\mu 2019}$ $*^{\%}$ In via semplificata, consideriamo qua terapie che possono avere solo esito fatale (morte) o successo (non si considerano diversi gradi di successo). Per un certo paziente si stanno ipotizzando 4 procedure:

terapia T1 e poi terapia T2
terapia T2 e poi terapia T4
terapia T3 e poi terapia T4
terapia T5.

Supponendo l'indipendenza degli eventi, trovare quale procedura conviene avendosi queste probabilità di esito fatale: T1: 9%, T2: 12%, T3: 4%, T4: 11%, T5: 13%.

SVOLGIMENTO

Con gli eventi complementari, si hanno queste probabilità di successo:
T1: 91%, T2: 88%, T3: 96%, T4: 89%, T5: 87%. Si ha

$$P(successo\, procedura\, 1^{\wedge}) = 0.91 \cdot 0.88 = 80.08\%$$
$$P(successo\, procedura\, 2^{\wedge}) = 0.88 \cdot 0.89 = 78.32\%$$
$$P(successo\, procedura\, 3^{\wedge}) = 0.96 \cdot 0.89 = 85.44\%$$
$$P(successo\, procedura\, 4^{\wedge}) = 0.87 = 87\%$$

e allora conviene l'ultima procedura:

terapia T5

BOZZA - DRAFT